

9.9 Napůl normální, napůl nilpotentní zobrazení

Úkol: Najděte vlastní vektory a vlastní čísla zobrazení $d : y \mapsto y'$ na prostoru $V = \mathcal{L}(\{\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x\})$. Najděte Jordanovu bázi prostoru V vzhledem k zobrazení d . Má zobrazení d nějaké invariantní podprostory? Je V rozložitelný na invariantní podprostory?

Řešení: Nemusíme být asi příliš zběhlí v lineární algebře, abychom uhodli, že vlastní funkce d (s příslušnými vlastními čísly) budou

$$\lambda_1 = i : e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \lambda_1 = -i : e^{ix} = \cos x - i \sin x.$$

Ať se ale budeme namáhat sebevíc, další vlastní čísla ani vlastní funkce (až na násobek těch již nalezených) se nám nepodaří najít. Zkusme tedy k úloze přistoupit systematicky lineárně (algebraicky).

V prostoru V si zvolíme bázi B ze zadání (lineární nezávislost si zájemci ověří sami). Zjistíme, jak zobrazení d působí na vektory báze, a určíme matici d

$$\begin{array}{lcl} \sin x & \xrightarrow{d} & (0, 1, 0, 0) \\ \cos x & \xrightarrow{d} & (-1, 0, 0, 0) \\ x \sin x & \xrightarrow{d} & (1, 0, 0, 1) \\ x \cos x & \xrightarrow{d} & (0, 1, -1, 0) \end{array} \Rightarrow d_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bystří tuší, že budeme dále hledat vlastní čísla a vlastní vektory této matice. Charakteristický polynom matice d_B najdeme nejsnáze jako

$$\det(d_B - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2,$$

srovnajte s příkladem 9.5c. Vlastní čísla jsou tedy skutečně pouze $\pm i$. Budeme se věnovat nejprve vlastnímu číslu $\lambda = i$. Zjistíme, jaká je dimenze kernelu matice $d_B - i\mathbb{1}$: z Gaussovy eliminace provedené níže (bez pravé strany) vidíme, že hodnost matice je tři, a tedy dimenze *jádra* pouze jedna. K číslu $\lambda = i$ tedy existuje jediný vlastní vektor v_1 . Ten můžeme také nalézt pomocí níže uvedené Gaussovy eliminace, tentokrát se samými nulami vpravo. Z posledních tří řádků matice na konci úprav plyne, že poslední dvě složky v_1 jsou nulové. První řádka říká, že si můžeme například druhou složku zvolit, a

zvolíme-li si ji rovnu jedné, vyjde vektor $v_1 = (i, 1, 0, 0)$. Neboli právě vlastní funkce $\cos x + i \sin x = e^{ix}$. Všimněte si, že zatímco složky vektoru v_1 závisí na volbě báze, *vlastní funkce zobrazení d* (a samozřejmě i vlastní číslo) zůstávají nezměněny.

Dále víme, že není-li $\dim \operatorname{Ker}(d_B - \lambda \mathbb{1})$ rovno (aritmetické) násobnosti λ , musí posloupnost $\dim \operatorname{Ker}(d_B - \lambda \mathbb{1})$, $\dim \operatorname{Ker}(d_B - \lambda \mathbb{1})^2, \dots$ (ostře) růst, dokud této násobnosti nedosáhne. Odpovídající podprostor (kdy se růst zastaví) se nazývá *kořenový podprostor*, a (lineární obal) sjednocení těchto kořenových podprostorů pro všechna vlastní čísla je celý prostor.

V našem případě tedy musí být $\dim \operatorname{Ker}(d_B - \lambda \mathbb{1})^2 = 2$ a stejně tak i $\dim \operatorname{Ker}(d_B - \lambda \mathbb{1})^k$ s $k > 2$ (zájemci mohou opět ověřit). Zajímá nás báze těchto (totožných⁴⁸) prostorů.

Jelikož jsme již našli $v_1 \in \operatorname{Ker}(d_B - \lambda \mathbb{1})$ a hledáme další vektor z $\operatorname{Ker}(d_B - \lambda \mathbb{1})^2$, stačí⁴⁹ najít řešení rovnice $(d_B - i \mathbb{1})v_2 = v_1$. Potlačíme mírné nechutenství a s gusem se pustíme do Gaussovy eliminace (na způsob příkladu 1.1)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} -i & -1 & 1 & 0 & i \\ 1 & -i & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{i \cdot (2) + (1) \rightarrow (2)} & \left(\begin{array}{cccc|c} -i & -1 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{\begin{array}{l} i \cdot (2) + (3) \rightarrow (3) \\ (4) - (2) \rightarrow (4) \end{array}} & \left(\begin{array}{cccc|c} -i & -1 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2i & -2i \end{array} \right) \end{aligned}$$

Řešení této rovnice je opět nekonečně mnoho, vidíme, že mají tvar $v_2 = (0, 0, i, 1) + \alpha v_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

⁴⁸Pozor, neříkáme, že $(d_B - \lambda \mathbb{1})^2 = (d_B - \lambda \mathbb{1})^3$. Pouze jádra těchto matic se shodují.

⁴⁹Jiná možnost by byla spočítat matici $(d_B - \lambda \mathbb{1})^2$ — buď umocněním již známé matice $d_B - \lambda \mathbb{1}$, anebo jednoduše určením působení této matice na bázevé funkce B — najít řešení $(d_B - \lambda \mathbb{1})^2 v_2 = 0$ a dopočítat $v_1 = (d_B - \lambda \mathbb{1})v_2$.

Dospíváme k zajímavému závěru. Jordanovu bázi příslušnou k vlastnímu číslu i tvoří tedy funkce $x e^{ix}$ a e^{ix} (místo $x e^{ix}$ lze brát i $x e^{ix} + \alpha e^{ix}$ s libovolným $\alpha \in \mathbb{C}$). Teď určitě uhadneme, jaká bude situace u druhého vlastního čísla, a můžeme působení operátoru d na V popsat tabulkou

$$d : \begin{cases} x e^{ix} & \xrightarrow{d-i\mathbb{1}} e^{ix} & \xrightarrow{d-i\mathbb{1}} 0 \\ x e^{-ix} & \xrightarrow{d+i\mathbb{1}} e^{-ix} & \xrightarrow{d+i\mathbb{1}} 0, \end{cases}$$

kteřá je zobecněním *spektrálního rozkladu*; o něm se mluví u diagonalizovatelných operátorů: tam obsahuje každý řádek (řetízek) tohoto schématu jediný vektor. Jinak řečeno, v Jordanově bázi $J = \{e^{ix}, x e^{ix}, e^{-ix}, x e^{-ix}\}$ má zobrazení d matici

$$d_J = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Tato matice je *blokově diagonální*, a tedy vektory příslušné jednotlivým blokům odpovídají *invariantním podprostorům*, na které lze rozložit V . Závěr je: $V_+ = \mathcal{L}(\{x e^{ix}, e^{ix}\})$ a $V_- = \mathcal{L}(\{x e^{-ix}, e^{-ix}\})$ jsou invariantní podprostory a $V_+ \oplus V_- = V$. Všimněte si, že i u matice d_B byl díky nulovému bloku vlevo dole vidět jeden invariantní podprostor, a to $V_0 = \mathcal{L}(\{\sin x, \cos x\})$, neboli $f \in V_0 \Rightarrow df \in V_0$.

Na závěr si jen pro ujasnění pojmů uvědomte, že zobrazení $d - i\mathbb{1}$ je na prostoru V_+ nilpotentní, a to stupně dva (tedy $(d - i\mathbb{1})^2$ je na V_+ identicky nulové zobrazení). prostoru funkcí typu $P(x) \cos nx + Q(x) \sin nx$. *KV

9.10 Jak počítat charakteristický polynom matice 3×3 pomocí jejích invariantů

Úkol: Budiž dána matice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$