Krátkou charakterizaci většiny příkladů naleznete v závěru knihy za seznamem literatury. Aktuální stav elektronické verze sbírky naleznete na stránce M.Z., která se koncem roku 2002 nalézala na

`http://adela.karlin.mff.cuni.cz/~mzahrad/`

Obsah

Stručné popisy příkladů

1.1 Soustava 3×3 s komplexními koeficienty.

1.2 Soustava 4×4 s parametrem.

1.3 Soustava 5 lineárních rovnic s mnoha nulami řešená (nesystematicky) dosazováním rovnic do sebe.

1.4 Důkaz regularity diagonálně dominantní matice potažmo jednoznačnosti řešení soustavy rovnic; ukázka fyzikálně motivovaných úprav (zavedení potenciálu).

2.1 Příklad grupy symetrií, studium struktury nepříliš velké grupy, přímé a polopřímé součiny.

2.2 Několik příkladů konečných grup.

2.3 Řád podgrupy dělí řád grupy, malá Fermatova věta, Eulerova funkce $\varphi(n)$ (počet přirozených čísel nesoudělných s n, menších než n).

2.4 Zkonstruování všech grup s nejvýše sedmi prvky.

2.5 Generátory grupy.

2.6 Konjugované prvky, (třídy) ekvivalence.

2.7 Přímé a polopřímé násobení grup a proces obrácený, tedy rozkládání grup.

2.8 Výpočet znaménka konkrétní permutace různými způsoby. Skládání permutací. Jednoduchý morfizmus, reprezentace.

2.9 Permutace, inverze, transpozice, cyklus.

2.10 Aplikace pojmu permutace a znak permutace.

3.1 $\mathbb{Z}_p$ — příklad jednoduchého komutativního tělesa.

3.2 Výpočet inverzní matice nad $\mathbb{Z}_{11}$.

3.3 Určování počtu vektorů v konečném prostoru a jeho podprostoru. Procvičování izomorfizmů mezi různými podprostory.

3.4 Příklad složitějšího konečného tělesa — polynomy s koeficienty ze $\mathbb{Z}_p$ a násobením modulo polynom.

3.5 Nenápadné cvičení na násobení komplexních čísel.

3.6 $\dim \operatorname{Ker} + \dim \operatorname{Im}$ lineárního zobrazení je rovno dimenzi prostoru, na kterém působí.

3.7 Viz příklad 3.6.

3.8 Viz příklad 3.6.

3.9 Hodnost matice AB je menší nebo rovna než hodnost A i hodnost B.

4.1 Studium množiny $\sum_i x_i \mathsf{v}_i$, $0 \leq x_i \leq 1$ a $\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_n \in \mathbb{R}^d$, $d < n$. Trénink na lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost.

4.2 Ověření podmínek definice vektorového prostoru.

4.3 Ověření podmínek definice vektorového prostoru, izomorfizmus vektorových prostorů.

4.4 Zjišťování, zda je podmnožina vektorového prostoru také jeho podprostorem.

4.5 Lineární závislost konkrétně zadaných vektorů z $\mathbb{R}^4$, lineární kombinace

4.6 Dimenze prostoru na jednoduchém případě (s parametrem). Prostory funkcí.

4.7 Dimenze lineárního obalu. Dimenze zobrazení. Lineární zobrazení. Restrikce zobrazení. Nekomutativita skládání zobrazení.

4.8 Výpočet složek vektoru v bázi soustavy bez a s pomocí skalárního součinu.

4.9 Ověřování lineární nezávislosti vektorů, matice přechodu mezi bázemi, transformace složek vektorů.

4.10 Vektorový prostor matic se stejnými řádkovými a sloupcovými součty. Dimenze vektorového prostoru. Afinní prostor.

4.11 Teoretická úloha na jádro zobrazení. Vše v prostoru $\mathbb{Z}_2^n$.

4.12 Lineární nezávislost polynomů. Aproximace funkce polynomy.

5.1 Určení ortogonálního doplňku ke konkrétnímu dvourozměrnému prostoru v $\mathbb{R}^4$.

5.2 Popis Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace.

5.3 Ukázka, jak lze v $\mathbb{R}^n$ sestrojit dva navzájem ortogonální prostory o dimenzích k a $n-k$.

5.4 Tři různé normy v $\mathbb{R}^n$; odpověď na otázku, zda je jim možné přiřadit skalární součin.

5.5 Příklady norem na prostorech čtvercových matic.

5.6 Souvislost některých norem pro matice s normami pro vektory.

5.7 Aproximace metodou nejmenších čtverců: jednou pomocí ortogonální projekce prostor polynomů nejvýše prvního stupně a podruhé nalezením minima funkce dvou proměnných.

6.1 Základní vlastnosti matic (hermicita, unitarita, komutativita, podobnost) předvedené na jednoduchém příkladě. Ukázka výpočtu komutátorů, antikomutátorů, vlastních čísel, exponenciál ve speciálním případě Pauliho matic.

6.2 Matice lineárního zobrazení vzhledem k různým bázím. Dimenze obrazu lineárního zobrazení. Invariantní podprostor.

6.4 Matice lineárního zobrazení vzhledem k různým bázím.

6.5 Výpočet inverzní matice 3×3 dvěma různými standardními způsoby.

6.6 Ověření, že je $\mathbb{SL}(2, \mathbb{Z})$ grupa. Generátory grupy, (krystalové) mřížky v rovině a jejich reparametrizace.

6.7 Popis systému podmnožin pomocí matic, násobení obecných matic. Dvojí počítání. Hodnost součinu matic.

6.8 Jak lze permutovat matice pod znakem stopy?

7.1 Manipulace s obdélníkovými maticemi (násobení). Popis orientovaného grafu pomocí matice.

7.2 Manipulace s obdélníkovými maticemi (násobení). Popis orientovaného grafu pomocí matice.

7.3 Determinant Laplaceovy matice grafu je roven počtu jeho podgrafů, které jsou stromy. Případ úplného grafu.

7.4 Příklad vektorového podprostoru $\mathbb{Z}_2^n$ a určení jeho dimenze pomocí konstrukce algebraického doplňku.

7.5 Určení vlastních čísel a vlastních vektorů u tří speciálních matic $n \times n$. Vlastní čísla a vlastní vektory matic A a A^n. Jak může vypadat například matice incidence?

7.6 Tvrzení o vlastních číslech a vlastních vektorech pro matici, která není zadána explicitně, známy jsou jen některé její vlastnosti.

7.7 Určení vlastních čísel speciální matice 10×10, aniž by se počítaly elementy matice. Společné vlastní vektory různých matic.

7.8 Prostory vlastních vektorů různých matic.

7.9 Různé možnosti definice součinu grafů. Matice incidence těchto součinů, mírná podobnost s tenzorovým součinem.

7.10 Jak lze charakterizovat "míru souvislosti" grafu pomocí vlastních čísel jeho matice incidence. Odhady $||A\mathsf{v}||$ pomocí vlastních čísel matice A.

7.11 Další charakteristika grafu pomocí vlastních čísel jeho matice incidence.

8.1 Výpočet číselného determinantu 4×4 různými metodami. Úpravy, při nichž se hodnota determinantu nezmění.

8.2 Tridiagonální (pásová) matice s obecnými elementy. Jednoduché cvičení na rekurentně zadané posloupnosti.

8.3 Výpočet známého determinantu standardní metodou (Gaussova eliminace).

8.4 Výpočet determinantu obecné matice $n \times n$ trikem s užitím cyklických vektorů. Jako vedlejší výsledek dostaneme vlastní vektory a vlastní čísla.

8.5 Výpočet obecného determinantu $n \times n$ pomocí minorů.

8.6 $\det AB = \det A \det B$ a další úpravy s velkou obecnou maticí. Jak rozpoznat vícenásobné kořeny polynomu na počítači.

8.7 Geometrický význam determinantu. Afinní prostor.

8.8 Důkaz tvrzení o determinantech pomocí definice determinantu. Tvrzení ke geometrickému významu determinantů.

9.1 Nalezení vzorce pro n–tý člen v rekurentně zadané posloupnosti pomocí diagonalizace matice 2×2.

9.2 Rychlý odhad pro hodnoty vlastních čísel zadané matice. Jednoduchý důkaz, proč je ostře diagonálně dominantní matice regulární. Rychlé kritérium pro pozitivní definitnost.

9.4 Vlastní čísla konkrétní matice $n \times n$. Determinant je součin vlastních čísel, stopa je součet vlastních čísel.

9.5 Determinant konkrétní matice 4×4 počítaný různými způsoby. Jak rozkládat polynomy (zvláště kubické a vyšší) s celočíselnými koeficienty.

9.6 Diagonalizace matice 2×2, počítání funkce matice. Vlastnosti symetrických matic na jednoduchém příkladě.

9.7 Diagonalizace nesymetrické matice 2×2. Výpočet a diskuze počtu řešení odmocniny z matice.

9.9 Jednoduchá soustava 4×4 s komplexními koeficienty. Matice lineárního zobrazení na prostoru funkcí. Vlastní čísla a vlastní funkce (vektory). Nediagonalizovatelnost, nilpotence zobrazení.

9.10 Charakteristický polynom matice 3×3 vyjádřený pomocí determinantu, stopy a stopy kvadrátu matice.

9.11 Konkrétní příklad soustavy n diferenciálních rovnic prvního řádu, která odpovídá jednorozměrné vlnové rovnici. Hledání vlastních čísel a vektorů matice $n \times n$ a jejich souvislost s vlastními kmity krystalové mřížky.

10.1 Matice lineárního zobrazení. Grupy $\mathbb{SO}(2)$ a $\mathbb{SO}(3)$. Ortogonální matice jsou matice rotací. Jak poznat pro zadanou ortogonální matici osu a úhel otočení. Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních matic.

10.2 Odvození matice pro obecné otočení v $\mathbb{R}^3$ kolem zadané osy o daný úhel. Eulerovy úhly. Rozklad prostoru na podprostor a jeho ortogonální doplněk.

10.3 Obecný tvar matice Lorentzovy transformace a nesouvislá grupa takových matic. Vlastní Lorentzovy transformace.

10.4 Reprezentace konečné grupy. Ireducibilní reprezentace.

11.1 Diagonalizace (vlastní čísla a vektory) a exponenciála matice 2×2. Souvislost s kvantovou mechanikou.

11.2 Soustava dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž matice není diagonalizovatelná. Exponenciála takové matice a jak se obejít bez přímého výpočtu této exponenciály.

11.3 Soustava dvou diferenciálních rovnic prvního řádu s pravou stranou. Řešení pomocí variace konstant.

11.4 Řešení reálné soustavy dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž matice má komplexní vlastní čísla. Jak odstranit komplexní čísla z výsledku.

11.5 Soustava tří diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž matici nelze diagonalizovat. Exponenciála této matice.

11.6 Wronskián. Derivace determinantu.

11.7 Úpravy řad pro exponenciálu a logaritmus. Žonglování s kombinačními čísly.

11.8 Výpočet exponenciály trikem pro speciální matici 2×2. Generátory $\mathbb{SU}(2)$, $\mathbb{U}(2)$. Torus, rank.

11.9 Elegantní přeformulace vzorce pro determinant exponenciály matice. Dostaneme vyjádření logaritmu determinantu matice ve tvaru nekonečné řady, což umožňuje například výpočet volné energie translačně invariantní gaussovské míry (nejjednoduššího to objektu statistické fyziky a QFT).

12.1 Jednoduchý příklad vektorového prostoru. Algebra $\mathfrak{so}_3$: její generátory, komutační relace mezi nimi. Souvislost s grupou $\mathbb{SO}_3$ pomocí exponenciály (infinitesimální generátory).

12.2 Izomorfizmus Lieových algeber. Vlastní čísla a vlastní vektory operátoru bez počítání s maticemi. Jak ukázat, že jsou dva operátory totožné, aniž bychom je explicitně počítali.

12.3 Řešitelná algebra, komutátory, ideály. Operace s horními trojúhelníkovými maticemi.

12.4 Tvrzení o ortogonálních doplňcích v jazyce duálních prostorů.

12.5 Cvičení na skalární součin. Dynkinovy diagramy a kompaktní Lieovy grupy.

13.1 Změna báze v duálním prostoru k $\mathbb{R}^2$ na jednoduchém početním příkladu. Matice přechodu.

13.2 Početní příklad na nalezení duální báze v $\mathbb{R}^3$. Souřadnice vektorů a forem vůči různým bázím. Matice přechodu. Indexy dole a indexy nahoře. Ztotožnění prostoru a jeho duálu.

13.3 Konkrétní lineární forma na prostoru polynomů, počítání jejích složek. Dualita.

14.1 Spektrální rozklad. Chování A^n pro $n \to \infty$.

14.2 Stopa matice hustoty a jejího kvadrátu. Ortogonální projekce.

14.4 Důkaz, že polynom spektra matice je spektrum polynomu z matice. Souvislost s Hamilton–Cayleyovou větou.

14.5 Výpočet funkce matice 3×3. Jordanův tvar.

14.6 Nerozložitelné matice a obecná věta o poloze vlastních čísel. Kriterium pro pozitivní definitnost u semidefinitních matic.

14.7 Konstrukce a studium matic speciálních vlastností (Hadamardových matic). Blokové násobení matic.

14.8 Odvození vektorových identit se skalárním a vektorovým součinem pomocí vlastností Levi–Civitova symbolu ε_{ijk}.

14.10 Komutátory matic. Kdy lze použít binomickou formuli pro matice.

14.11 Výpočet Laplaceova operátoru v libovolných ortogonálních souřadnicích v $\mathbb{R}^n$: trochu vektorové analýzy (derivování maticových výrazů, Laméovy koeficienty).

15.1 Důkaz, že lze bistochastické matice zapsat jako konvexní kombinaci permutačních matic. Příklad bipartitního grafu, užití teorie grafů v lineární algebře.

15.2 Důkaz, že stochastická matice má jednonásobné vlastní číslo jedna.

15.3 Jordanovy řetězce. Převod nilpotentní matice 4×4 na Jordanův tvar.

15.4 Jordanův tvar matice 3×3 s jedním vlastním číslem a dvěma řetězci.

15.5 Jordanův tvar matice 3×3 s jedním vlastním číslem a jediným řetězcem.

15.6 Jordanův tvar matice 4×4 s jedním vlastním číslem a dvěma řetězci různých délek.

15.7 Jordanův tvar matice 4×4 s jedním vlastním číslem a dvěma řetězci délky dva.

15.8 Jordanův tvar matice 3×3, která má dvě vlastní čísla a není diagonalizovatelná.

15.9 Nalezení matice C tak, aby platilo $CAC^{-1} = B$, kde A, B jsou dvě podobné (nediagonalizovatelné) matice. Jordanův tvar matic 3×3.

16.1 Obecná tvrzení o posloupnostech ortogonálních polynomů. Momentový funkcionál.

16.2 Hledání vlastních čísel a vlastních vektorů diferenciálního operátoru na prostoru funkcí jedné proměnné pomocí triku. Fyzikálně: nalezení vlastních stavů a energií speciálního jednorozměrného hamiltoniánu pomocí kreačních a anihilačních operátorů. Diracova notace.

16.3 Nalezení spektra diferenciálního operátoru na prostoru funkcí na $\mathbb{R}^3$ pomocí symetrií. Lieovy algebry $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(2)$; reprezentace $\mathbb{U}(n)$, $\mathbb{SU}(2)$. Symetrie hamiltoniánu atomu vodíku.

16.4 Spektrum diferenciálního operátoru na prostoru funkcí více proměnných pomocí rozkladu na operátory působící na prostorech jedné proměnné; kreační a anihilační operátory. Diagonalizace kvadratické formy. Tenzorové součiny (na příkladu funkcí). Fyzikálně: nalezení spektra anizotropního harmonického oscilátoru ve více dimenzích.

16.5 Reprezentace algebry operátorů. Nalezení hodnot, jichž může nabývat operátor momentu hybnosti.

17.1 Typy kvadrik v $\mathbb{R}^3$. Určení typu kvadriky pomocí jejích invariantů (tj. určitých výrazů s determinanty).

17.2 Převod kvadriky na kanonický tvar pomocí vlastních čísel: osy kvadriky jsou vlastní vektory a jejich délky vlastní čísla matice kvadratické formy. Ortogonální transformace.

17.3 Diagonalizace konkrétní kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$ řádkovými a sloupcovými úpravami. Typ kvadratické plochy.

17.4 Diagonalizace konkrétní kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$ pomocí vlastních čísel. Typ kvadratické plochy.

17.5 Diagonalizace konkrétní kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$ řádkovými a sloupcovými úpravami. Sylvestrovo kritérium.

17.6 Dva rychlé příklady na signaturu a pozitivní definitnost. Spektrální rozklad operátoru. Sylvestrovo kritérium.

17.7 Analytická geometrie v $\mathbb{R}^n$, obecný příklad.

17.8 Jak poznat, zda zadaný bod leží uvnitř n–dimenzionální sféry definované $n+1$ body.

17.9 Rovnice všech tečen k jednodílnému hyperboloidu v $\mathbb{R}^3$.

17.10 Rovnice tečen jednodílného hyperboloidu v $\mathbb{R}^n$. Diagonalizace kvadratické formy v $\mathbb{R}^{n-1}$.

18.1 Polární rozklad konkrétní matice 3×3 dvěma metodami. Význam vlastního vektoru u matice deformace.

18.2 Rozšíření věty o polárním rozkladu i na singulární matice.

18.3 Nejlepší řešení soustavy s více rovnicemi než proměnnými, která přesné řešení nemá. Teorie. Ortogonální projekce.

18.4 Aproximace metodou nejmenších čtverců. Řešení soustavy s více rovnicemi než proměnnými. Konkrétní příklad na pseudoinverzi matice $n \times 2$.

19.1 Složky konkrétního tenzoru typu $(2,1)$. Transformace souřadnic. Symetrie tenzoru.

19.2 Příklad tenzoru typu $(0,2)$ na $\mathbb{R}^3$. Symetrie, transformace při změně báze. Duální báze.

19.3 Lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jako tenzor typu $(1,1)$. Výpočet složek tenzoru setrvačnosti.

19.4 Fyzikální příklady tenzorů druhého řádu ze speciální relativity. Spouštění a zvedání indexů. Derivování.

19.5 Vzorečky pro Levi–Civitův tenzor ε_{ijk} (ověření transformačních vlastností). Tenzorový součin tenzorů, úžení tenzorů. Práce s determinanty.

19.6 Dimenze prostorů totálně symetrických a totálně antisymetrických tenzorů typu $(0,k)$. Symetrizovaný a antisymetrizovaný tenzorový součin.

19.7 Tenzorový součin operátorů. Stopa a částečná stopa (úžení tenzorů).

19.8 Antisymetrické tenzory, vnější algebra. Anulátor a rozložitelnost tenzorů.

20.1 Jak se chovají jednotlivé bloky blokových matic při násobení.

20.2 Odvození nejdůležitějších formulí týkajících se gaussovského integrování, nejjednodušší a nejzákladnější úlohy vícerozměrné integrace. Je to instruktivní použití kombinace lineárně algebraických, analytických i kombinatorických úvah, vedoucích m.j. k objasnění role inverzní (korelační) matice.

20.4 Jednoduché, (téměř) jen kombinatorické odvození tvaru mocninné řady pro logaritmus.

20.5 Upozornění na roli největšího vlastního čísla (a příslušného vlastního vektoru) při výpočtech velkých mocnin matic.

20.6 Algebra násobení matic se čtyřmi bloky.

20.7 Diskuse, jak souvisí existence tzv. cyklického vektoru s jednoznačností Jordanových buněk. Teorie Jordanova tvaru pro pokročilejší.

20.8 Pomocná úloha: Výpočet zobecněného Vandermondova determinantu, kde k původním řádkům přistupují i jejich derivace. Navazuje na úlohu o cyklických vektorech.

20.9 Výpočet odmocniny z velmi jednoduché matice.

20.10 Pfaffián: vyjádření determinantu antisymetrické matice čtvercem.

20.11 Populační dynamika společnosti mužů a žen trochu podrobněji.

20.12 Resolventa: vše, co se o tomto důležitém pojmu dá říci v konečné dimenzi.

20.14 Rozsazení u kulatého stolu: jak výpočet stopy mocniny matice pomocí spektra pomáhá vyřešit netriviální kombinatorické i fyzikální problémy.

20.15 Symetrický cirkulant, tentokrát v převlečení za kvadratickou formu. K tomu jedna zdánlivě podobná, ve skutečnosti mnohem elementárnější úloha.

20.16 Přibližný výpočet $A^n x$: opět o roli vlastního vektoru příslušného největšímu vlastnímu číslu.

20.17 Ortogonalizace posloupnosti, cvičení na aplikaci Grammovy–Schmidtovy postupné ortogonalizace.

20.19 Goniometrický Vandermondův determinat, spočteno převedením na obyčejný Vandermondův determinant.

20.21 Systémy oscilátorů s nárazy, procvičení práce s pojmem exponenciála matice a Diracovou delta funkcí.

20.22 Studium chování nejjednoduššího vícerozměrného systému poblíž jeho bodu resonance, výpočet amplitudy řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic se sinusovou vnější silou.

20.23 Několik vhodných příkladů matic typu 3×3 na procvičení Jordanova tvaru (převzato ze sbírky Filippova).

20.24 K čemu všemu mohou sloužit řádkové úpravy matice, pokus o shrnutí typických situací, kde se takovéto úpravy používají.

20.25 I zkoumání zdánlivě tak jednoduché funkce, jakou je $ax^2 + bx$, dává zajímavé interpretace ve vícerozměrném případě, pro systémy velmi mnoha spřažených oscilátorů. Kvadratická forma definovaná jako "suma čtverců rozdílů hodnot sousedů" vede ke zkoumání teorie potenciálu na mříži. To má zajímavé souvislosti s pravděpodobností, konkrétně s teorií náhodných procházek.

20.27 Jak vypadá adjunkce k nilpotentnímu operátoru v jednom charakteristickém speciálním případě.

20.28 Jak poznat, že šestiúhelník v rovině je ortogonální projekcí krychle. Teoretická úloha.

20.29 Translačně invariantní kvadratické formy na mříži a jejich podmíněná minima (Coulombovy potenciály). Aplikace na problém (ne)vratnosti náhodné procházky a na otázku existence fázového přechodu příslušné gaussovské míry.