

Krátkou charakterizaci většiny příkladů naleznete v závěru knihy za seznamem literatury. Aktuální stav elektronické verze sbírky naleznete na stránce M.Z., která se koncem roku 2002 nalézala na

<http://adela.karlin.mff.cuni.cz/~mzahrad/>

Obsah

1	Geometrie a soustavy rovnic	12
1.1	Jedna obyčejná soustava lineárních rovnic	12
1.2	Soustava 4×4 s parametrem	13
1.3	Odpor osmistěnu	16
1.4	Soustavy lineárních rovnic a elektrické obvody	17
2	Hrátky s grupami a permutacemi	21
2.1	Grupová rozcvička aneb Symetrie čtyřstěnu	21
2.2	Jednoduché grupy	25
2.3	Grupy a teorie čísel	28
2.4	Nevelké grupy	29
2.5	Grupa generovaná Pauliho maticemi	31
2.6	Konjugované prvky	32
2.7	Rozklady grup, přímé a polopřímé součiny	33
2.8	Znaménko permutace	35
2.9	Permutace devětkrát jinak	36
2.10	Lloydova patnáctka a permutace	40
3	Konečná i jiná tělesa	43
3.1	Tělesa modulo prvočíslo	43
3.2	Zmatené výpočty s inverzní maticí	43
3.3	Podprostory nad konečným tělesem	45
3.4	Konečná tělesa polynomů	46
3.5	Vzorec pro Ludolfovo číslo od Johna Machina	48
3.6	Sudé podmnožiny se sudými průniky	49
3.7	Doplňování systému sudých podmnožin se sudými průniky	51
3.8	Liché podmnožiny s lichými průniky	52
3.9	Liché podmnožiny se sudými průniky	53
3.10	Sudé podmnožiny s lichými průniky	54

4	Vektorová odysea	56
4.1	Rozklad degenerovaného rovnoběžnostěnu	56
4.2	Tři základní vektorové prostory	60
4.3	Jeden neobvyklejší vektorový prostor	61
4.4	Je to podprostor, není to podprostor...	62
4.5	Lineární závislost vektorů z \mathbb{R}^4	65
4.6	Dimenze lineárního obalu	67
4.7	Hodnost lineárního zobrazení	68
4.8	Složky vektoru vzhledem k ortogonální bázi	70
4.9	Báze, souřadnice, homomorfizmy	71
4.10	Magické čtverce	77
4.11	Vektory se sudým počtem jedniček	80
4.12	Bernštejnovy polynomy	81
5	Úlohy pro ortogonalisty	83
5.1	Ortogonální doplněk	83
5.2	Grammova–Schmidtova ortogonalizace	85
5.3	Ortogonální doplněk jednoho řádkového prostoru	89
5.4	Různé normy v \mathbb{R}^n	89
5.5	Normy pro matice	92
5.6	Jak daleko jsou vektory od matic, aneb Hrušky s jabkama	93
5.7	Lineární regrese tak nebo jinak	95
6	Matice a jim podobné	100
6.1	Pauliho spinové matice	100
6.2	Matice homomorfizmu	104
6.3	Ortogonální projektory na podprostor	106
6.4	Matice vektorového součinu	110
6.5	Výpočet inverzní matice	113
6.6	Modulární grupa	114
6.7	Fisherova nerovnost	119
6.8	Cykličnost stopy	120
7	Lineární algebra pro grafiky	122
7.1	Je to strom nebo není to strom?	122
7.2	Laplaceova matice	123
7.3	Počet koster	124

7.4	Prostor cyklů grafu	124
7.5	Spektrum matice incidence grafu	125
7.6	Vlastnosti matice incidence grafu	127
7.7	Spektrum matice incidence Petersenova grafu	130
7.8	Rozklad úplného grafu na tři Petersenovy grafy	131
7.9	Spektrum matice incidence součinu grafů	131
7.10	Jak poznat stupeň souvislosti v grafu?	133
7.11	Expandéry	135
8	Determinátoři	136
8.1	Obyčejné determinanty s čísly	145
8.2	Determinant s řeckými písmeny	147
8.3	Vandermondův determinant	148
8.4	Výpočet cirkulantu využitím znalosti spektra	150
8.5	Zobecněná Hilbertova matice	151
8.6	Rezultant	153
8.7	Poloha bodu vůči nadrovině	155
8.8	Cauchy–Binetova věta	156
9	Naše první vlastní čísla	160
9.1	Fibonacciho posloupnost	160
9.2	Gershgorinova věta	162
9.3	Vlastní čísla jedné obyčejné matice	163
9.4	Vlastní čísla pro začátečnický	164
9.5	Vlastní čísla matice 4×4	165
9.6	Sinus matice	167
9.7	Odmocnina z matice	169
9.8	Sinus či odmocnina matice jinak	170
9.9	Napůl normální, napůl nilpotentní zobrazení	173
9.10	Jak počítat charakteristický polynom matice 3×3 pomocí jejích invariantů	175
9.11	Jednorozměrný model krystalu	178
10	Grupy matic a otců	182
10.1	Jak zatočit s maticemi v \mathbb{R}^2	182
10.2	Matice otočení v \mathbb{R}^3	185
10.3	Grupa Lorentzových transformací	189
10.4	Reprezentace	191

11	Exponenciála se nebojí	194
11.1	Dvouladínový systém aneb Hrátky s maticí 2×2	194
11.2	Soustava diferenciálních rovnic s rezonancí	197
11.3	Diferenciální rovnice s pravou stranou	201
11.4	Komplexně půvabná diferenciální rovnice	203
11.5	Soustava 3 diferenciálních rovnic	206
11.6	Lineární nezávislost řešení soustavy diferenciálních rovnic	208
11.7	Jsou exponenciála a logaritmus opravdu navzájem inverzní?	209
11.8	Generátory $SU(2)$ aneb Výpočet exponenciály trikem pro speciální matici	212
11.9	Jedna exponenciální formule pro determinant	214
12	Lieovy hlavolamy	220
12.1	Jak připravit kysličník sírový	220
12.2	Algebra \mathfrak{so}_3 a vektorový součin	222
12.3	Řešitelné algebry	225
12.4	Anihilátor	225
12.5	Nebojte se Dynkinových diagramů	227
13	Duální prostory k pronájmu	232
13.1	Transformace složek formy při změně báze	232
13.2	Duální báze	233
13.3	Jedna opravdová forma	239
14	Matice pro středně pokročilé	241
14.1	Konvergence k vlastním číslům	241
14.2	Matice hustoty	242
14.3	Spektrum polynomu	244
14.4	Ještě jednou polynomy matic	245
14.5	Polynomy matic potřetí	246
14.6	Vlastní čísla nerozložitelných matic	248
14.7	Hadamardovy matice	249
14.8	Základní vektorové identity v \mathbb{R}^3	251
14.9	Chování smíšeného součinu při lineárních transformacích	252
14.10	Komutátorová binomická formule	254

14.11	Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích	254
15	Jordan hledí pozitivně	259
15.1	Birkhoffova věta	259
15.2	Stochastické matice	260
15.3	Nilpotentní matice	262
15.4	Jordanův tvar poprvé	268
15.5	Jordanův tvar podruhé	270
15.6	Jordanův tvar potřetí	272
15.7	Jordanův tvar počtvrté	274
15.8	Jordanův tvar naposledy	276
15.9	Jsou si ty matice opravdu podobné?	278
16	Ortogonální funkce a trochu kvantové mechaniky	281
16.1	Ortogonální polynomy	281
16.2	Variace na kreační operátory	287
16.3	$\mathbb{SO}(4)$ symetrie atomu vodíku	290
16.4	Vícerozměrný anizotropní harmonický oscilátor	298
16.5	Kvantování momentu hybnosti	301
17	Lepé tvary kvadratické	306
17.1	Klasifikace kvadrik aneb Vzorečky, vzorečky	306
17.2	Klasifikace kvadrik aneb Jak to vymyslet sám	311
17.3	Diagonalizace kvadratické formy: řádkové a sloup- cové úpravy	314
17.4	Diagonalizace kvadratické formy: vlastní čísla	316
17.5	Signatura kvadratické formy	318
17.6	Signatura stručně	320
17.7	Průmět průniku paraboly a nadroviny	321
17.8	Poloha bodu vůči sféře	322
17.9	Chladící věže poprvé: \mathbb{R}^3	323
17.10	Chladící věže podruhé: \mathbb{R}^n	325
18	Rozklady polárníka při teplotní pseudoinverzi	331
18.1	Polární rozklad deformačního gradientu	331
18.2	Polární rozklad singulární matice	336
18.3	Nejbližší řešení soustavy rovnic	337
18.4	Lineární regrese potřetí jinak	337

19	Poklady ukryté v tenzorech	340
19.1	Jak může vypadat tenzor typu $(2, 1)$	340
19.2	Jednoduchý tenzor typu $(0, 2)$	342
19.3	Tenzor setrvačnosti	343
19.4	Tenzory ve speciální relativitě	345
19.5	O Levi–Civitově tenzoru	350
19.6	Symetrické a antisymetrické tenzory	354
19.7	Tenzorové součiny operátorů	357
19.8	Rozložitelné antisymetrické tenzory a vektorový součin	358
20	Několik dalších příkladů	362
20.1	Násobení blokových matic; výpočet inverze blokové matice	362
20.2	Gaussovské integrály v \mathbb{R}^n — základní výpočty	362
20.3	Integrály polynomů a exponenciály (vytvorující funkce) vůči gaussovské míře	366
20.4	Exponenciála mocninné řady a rozvoj logaritmu	371
20.5	Přibližné výpočty velkých mocnin matic	373
20.6	Násobení blokových matic typu 2×2	374
20.7	Cyklické vektory operátorů	375
20.8	Zobecněný Vandermondův determinant	377
20.9	Výpočet odmocniny symetrické matice	379
20.10	Pfaffián antisymetrické matice	380
20.11	Populační model	383
20.12	Resolventa matice a operátoru	385
20.13	Signatura kvadratické formy	387
20.14	Rozsazení u kulatého stolu	388
20.15	Signatura cyklické kvadratické formy	390
20.16	Přibližný výpočet $A^n x$	392
20.17	Ortogonalizace posloupnosti	393
20.18	Ortogonalizace posloupnosti funkcí	394
20.19	Goniometrický Vandermondův determinant	395
20.20	Jednoduchý příklad na spektrum	396
20.21	Systémy oscilátorů s vnější silou typu δ -funkce	396
20.22	Resonance v soustavách lineárních diferenciálních rovnic	398
20.23	Několik číselných příkladů na řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty	399

20.24	Převedení obdélníkové matice $(A B)$ na tvar $(\mathbb{1} A^{-1}B)$. Co všechno z toho plyne.	401
20.25	Minima kvadratických forem a systémy mnoha spřažených harmonických oscilátorů	403
20.26	Interpretace výsledku úlohy 20.25 pro systém spřažených oscilátorů. Feynman–Kacova formule. . . .	405
20.27	Anihilační a kreační operátor na konečněrozměrném prostoru se skalárním součinem	409
20.28	Projekce ortogonální báze	410
20.29	Translačně invariantní kvadratické formy a náhodné procházky na mříži	411
20.30	Lorentzovy transformace	421

Stručné popisy příkladů

- 1.1 Soustava 3×3 s komplexními koeficienty.
- 1.2 Soustava 4×4 s parametrem.
- 1.3 Soustava 5 lineárních rovnic s mnoha nulami řešená (nesystematicky) dosazováním rovnic do sebe.
- 1.4 Důkaz regularity diagonálně dominantní matice potažmo jednoznačnosti řešení soustavy rovnic; ukázka fyzikálně motivovaných úprav (zavedení potenciálu).
- 2.1 Příklad grupy symetrií, studium struktury nepříliš velké grupy, přímé a polopřímé součiny.
- 2.2 Několik příkladů konečných grup.
- 2.3 Řád podgrupy dělí řád grupy, malá Fermatova věta, Eulerova funkce $\varphi(n)$ (počet přirozených čísel nesoudělných s n , menších než n).
- 2.4 Zkonstruování všech grup s nejvýše sedmi prvky.
- 2.5 Generátory grupy.
- 2.6 Konjugované prvky, (třídy) ekvivalence.
- 2.7 Přímé a polopřímé násobení grup a proces obrácený, tedy rozkládání grup.
- 2.8 Výpočet znaménka konkrétní permutace různými způsoby. Skládání permutací. Jednoduchý morfismus, reprezentace.
- 2.9 Permutace, inverze, transpozice, cyklus.
- 2.10 Aplikace pojmu permutace a znak permutace.
- 3.1 \mathbb{Z}_p — příklad jednoduchého komutativního tělesa.
- 3.2 Výpočet inverzní matice nad \mathbb{Z}_{11} .
- 3.3 Určování počtu vektorů v konečném prostoru a jeho podprostoru. Procvičování izomorfismů mezi různými podprostory.
- 3.4 Příklad složitějšího konečného tělesa — polynomy s koeficienty ze \mathbb{Z}_p a násobením modulo polynom.
- 3.5 Nenápadné cvičení na násobení komplexních čísel.
- 3.6 $\dim \text{Ker} + \dim \text{Im}$ lineárního zobrazení je rovno dimenzi prostoru, na kterém působí.

- 3.7 Viz příklad 3.6.
- 3.8 Viz příklad 3.6.
- 3.9 Hodnost matice AB je menší nebo rovna než hodnost A i hodnost B .
- 4.1 Studium množiny $\sum_i x_i v_i$, $0 \leq x_i \leq 1$ a $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$, $d < n$.
Trénink na lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost.
- 4.2 Ověření podmínek definice vektorového prostoru.
- 4.3 Ověření podmínek definice vektorového prostoru, izomorfismus vektorových prostorů.
- 4.4 Zjišťování, zda je podmnožina vektorového prostoru také jeho podprostorem.
- 4.5 Lineární závislost konkrétně zadaných vektorů z \mathbb{R}^4 , lineární kombinace
- 4.6 Dimenze prostoru na jednoduchém případě (s parametrem).
Prostory funkcí.
- 4.7 Dimenze lineárního obalu. Dimenze zobrazení. Lineární zobrazení. Restrikce zobrazení. Nekomutativita skládání zobrazení.
- 4.8 Výpočet složek vektoru v bázi soustavy bez a s pomocí skalárního součinu.
- 4.9 Ověřování lineární nezávislosti vektorů, matice přechodu mezi bázemi, transformace složek vektorů.
- 4.10 Vektorový prostor matic se stejnými řádkovými a sloupcovými součty. Dimenze vektorového prostoru. Afinní prostor.
- 4.11 Teoretická úloha na jádro zobrazení. Vše v prostoru \mathbb{Z}_2^n .
- 4.12 Lineární nezávislost polynomů. Aproximace funkce polynomy.
- 5.1 Určení ortogonálního doplňku ke konkrétnímu dvourozměrnému prostoru v \mathbb{R}^4 .
- 5.2 Popis Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace.
- 5.3 Ukázka, jak lze v \mathbb{R}^n sestrojít dva navzájem ortogonální prostory o dimenzích k a $n - k$.
- 5.4 Tři různé normy v \mathbb{R}^n ; odpověď na otázku, zda je jim možné přiřadit skalární součin.

- 5.5 Příklady norem na prostorech čtvercových matic.
- 5.6 Souvislost některých norem pro matice s normami pro vektory.
- 5.7 Aproximace metodou nejmenších čtverců: jednou pomocí ortogonální projekce prostor polynomů nejvýše prvního stupně a podruhé nalezením minima funkce dvou proměnných.
- 6.1 Základní vlastnosti matic (hermitičita, unitarita, komutativita, podobnost) předvedené na jednoduchém příkladě. Ukázka výpočtu komutátorů, antikomutátorů, vlastních čísel, exponenciál ve speciálním případě Pauliho matic.
- 6.2 Matice lineárního zobrazení vzhledem k různým bázím. Dimenze obrazu lineárního zobrazení. Invariantní podprostor.
- 6.4 Matice lineárního zobrazení vzhledem k různým bázím.
- 6.5 Výpočet inverzní matice 3×3 dvěma různými standardními způsoby.
- 6.6 Ověření, že je $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ grupa. Generátory grupy, (krystalové) mřížky v rovině a jejich reparametrizace.
- 6.7 Popis systému podmnožin pomocí matic, násobení obecných matic. Dvojí počítání. Hodnota součinu matic.
- 6.8 Jak lze permutovat matice pod znakem stopy?
- 7.1 Manipulace s obdélníkovými maticemi (násobení). Popis orientovaného grafu pomocí matice.
- 7.2 Manipulace s obdélníkovými maticemi (násobení). Popis orientovaného grafu pomocí matice.
- 7.3 Determinant Laplaceovy matice grafu je roven počtu jeho podgrafů, které jsou stromy. Příklad úplného grafu.
- 7.4 Příklad vektorového podprostoru \mathbb{Z}_2^n a určení jeho dimenze pomocí konstrukce algebraického doplňku.
- 7.5 Určení vlastních čísel a vlastních vektorů u tří speciálních matic $n \times n$. Vlastní čísla a vlastní vektory matic A a A^n . Jak může vypadat například matice incidence?
- 7.6 Tvrzení o vlastních číslech a vlastních vektorech pro matici, která není zadána explicitně, známy jsou jen některé její vlastnosti.

- 7.7 Určení vlastních čísel speciální matice 10×10 , aniž by se počítaly elementy matice. Společné vlastní vektory různých matic.
- 7.8 Prostory vlastních vektorů různých matic.
- 7.9 Různé možnosti definice součinu grafů. Matice incidence těchto součinů, mírná podobnost s tenzorovým součinem.
- 7.10 Jak lze charakterizovat “míru souvislosti” grafu pomocí vlastních čísel jeho matice incidence. Odhady $\|Av\|$ pomocí vlastních čísel matice A .
- 7.11 Další charakteristika grafu pomocí vlastních čísel jeho matice incidence.
- 8.1 Výpočet číselného determinantu 4×4 různými metodami. Úpravy, při nichž se hodnota determinantu nezmění.
- 8.2 Tridiagonální (pásová) matice s obecnými elementy. Jednoduché cvičení na rekurentně zadané posloupnosti.
- 8.3 Výpočet známého determinantu standardní metodou (Gaussova eliminace).
- 8.4 Výpočet determinantu obecné matice $n \times n$ trikem s užitím cyklických vektorů. Jako vedlejší výsledek dostaneme vlastní vektory a vlastní čísla.
- 8.5 Výpočet obecného determinantu $n \times n$ pomocí minorů.
- 8.6 $\det AB = \det A \det B$ a další úpravy s velkou obecnou maticí. Jak rozpoznat vícenásobné kořeny polynomu na počítači.
- 8.7 Geometrický význam determinantu. Afinní prostor.
- 8.8 Důkaz tvrzení o determinantech pomocí definice determinantu. Tvrzení ke geometrickému významu determinantů.
- 9.1 Nalezení vzorce pro n -tý člen v rekurentně zadané posloupnosti pomocí diagonalizace matice 2×2 .
- 9.2 Rychlý odhad pro hodnoty vlastních čísel zadané matice. Jednoduchý důkaz, proč je ostře diagonálně dominantní matice regulární. Rychlé kritérium pro pozitivní definitnost.
- 9.4 Vlastní čísla konkrétní matice $n \times n$. Determinant je součin vlastních čísel, stopa je součet vlastních čísel.

- 9.5 Determinant konkrétní matice 4×4 počítaný různými způsoby. Jak rozkládat polynomy (zvláště kubické a vyšší) s celočíselnými koeficienty.
- 9.6 Diagonalizace matice 2×2 , počítání funkce matice. Vlastnosti symetrických matic na jednoduchém příkladě.
- 9.7 Diagonalizace nesymetrické matice 2×2 . Výpočet a diskuze počtu řešení odmocniny z matice.
- 9.9 Jednoduchá soustava 4×4 s komplexními koeficienty. Matice lineárního zobrazení na prostoru funkcí. Vlastní čísla a vlastní funkce (vektory). Nediagonalizovatelnost, nilpotence zobrazení.
- 9.10 Charakteristický polynom matice 3×3 vyjádřený pomocí determinantu, stopy a stopy kvadrátu matice.
- 9.11 Konkrétní příklad soustavy n diferenciálních rovnic prvního řádu, která odpovídá jednorozměrné vlnové rovnici. Hledání vlastních čísel a vektorů matice $n \times n$ a jejich souvislost s vlastními kmity krystalové mřížky.
- 10.1 Matice lineárního zobrazení. Grupy $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ a $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$. Ortogonální matice jsou matice rotací. Jak poznat pro zadanou ortogonální matici osu a úhel otočení. Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních matic.
- 10.2 Odvození matice pro obecné otočení v \mathbb{R}^3 kolem zadané osy o daný úhel. Eulerovy úhly. Rozklad prostoru na podprostor a jeho ortogonální doplněk.
- 10.3 Obecný tvar matice Lorentzovy transformace a nesouvislá grupa takových matic. Vlastní Lorentzovy transformace.
- 10.4 Reprezentace konečné grupy. Ireducibilní reprezentace.
- 11.1 Diagonalizace (vlastní čísla a vektory) a exponenciála matice 2×2 . Souvislost s kvantovou mechanikou.
- 11.2 Soustava dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž matice není diagonalizovatelná. Exponenciála takové matice a jak se obejít bez přímého výpočtu této exponenciály.
- 11.3 Soustava dvou diferenciálních rovnic prvního řádu s pravou stranou. Řešení pomocí variace konstant.

- 11.4 Řešení reálné soustavy dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž matice má komplexní vlastní čísla. Jak odstranit komplexní čísla z výsledku.
- 11.5 Soustava tří diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž matici nelze diagonalizovat. Exponenciála této matice.
- 11.6 Wronskián. Derivace determinantu.
- 11.7 Úpravy řad pro exponenciálu a logaritmus. Žonglování s kombinačními čísly.
- 11.8 Výpočet exponenciály trikem pro speciální matici 2×2 . Generátory $SU(2)$, $U(2)$. Torus, rank.
- 11.9 Elegantní přeformulace vzorce pro determinant exponenciály matice. Dostaneme vyjádření logaritmu determinantu matice ve tvaru nekonečné řady, což umožňuje například výpočet volné energie translačně invariantní gaussovské míry (nejjednoduššího to objektu statistické fyziky a QFT).
- 12.1 Jednoduchý příklad vektorového prostoru. Algebra \mathfrak{so}_3 : její generátory, komutační relace mezi nimi. Souvislost s grupou $S\mathbb{O}_3$ pomocí exponenciály (infinitesimální generátory).
- 12.2 Izomorfismus Lieových algeber. Vlastní čísla a vlastní vektory operátoru bez počítání s maticemi. Jak ukázat, že jsou dva operátory totožné, aniž bychom je explicitně počítali.
- 12.3 Řešitelná algebra, komutátory, ideály. Operace s horními trojúhelníkovými maticemi.
- 12.4 Tvrzení o ortogonálních doplňcích v jazyce duálních prostorů.
- 12.5 Cvičení na skalární součin. Dynkinovy diagramy a kompaktní Lieovy grupy.
- 13.1 Změna báze v duálním prostoru k \mathbb{R}^2 na jednoduchém početním příkladu. Matice přechodu.
- 13.2 Početní příklad na nalezení duální báze v \mathbb{R}^3 . Souřadnice vektorů a forem vůči různým bázím. Matice přechodu. Indexy dole a indexy nahoře. Ztotožnění prostoru a jeho duálu.
- 13.3 Konkrétní lineární forma na prostoru polynomů, počítání jejích složek. Dualita.
- 14.1 Spektrální rozklad. Chování A^n pro $n \rightarrow \infty$.

- 14.2 Stopa matice hustoty a jejího kvadrátu. Ortogonální projekce.
- 14.4 Důkaz, že polynom spektra matice je spektrum polynomu z matice. Souvislost s Hamilton–Cayleyovou větou.
- 14.5 Výpočet funkce matice 3×3 . Jordanův tvar.
- 14.6 Nerozložitelné matice a obecná věta o poloze vlastních čísel. Kriterium pro pozitivní definitnost u semidefinitních matic.
- 14.7 Konstrukce a studium matic speciálních vlastností (Hadamardových matic). Blokové násobení matic.
- 14.8 Odvození vektorových identit se skalárním a vektorovým součinem pomocí vlastností Levi–Civita symbolu ε_{ijk} .
- 14.10 Komutátory matic. Kdy lze použít binomickou formuli pro matice.
- 14.11 Výpočet Laplaceova operátoru v libovolných ortogonálních souřadnicích v \mathbb{R}^n : trochu vektorové analýzy (derivování maticových výrazů, Laméovy koeficienty).
- 15.1 Důkaz, že lze bistochastické matice zapsat jako konvexní kombinaci permutačních matic. Příklad bipartitního grafu, užití teorie grafů v lineární algebře.
- 15.2 Důkaz, že stochastická matice má jednonásobné vlastní číslo jedna.
- 15.3 Jordanovy řetězce. Převod nilpotentní matice 4×4 na Jordanův tvar.
- 15.4 Jordanův tvar matice 3×3 s jedním vlastním číslem a dvěma řetězci.
- 15.5 Jordanův tvar matice 3×3 s jedním vlastním číslem a jediným řetězcem.
- 15.6 Jordanův tvar matice 4×4 s jedním vlastním číslem a dvěma řetězci různých délek.
- 15.7 Jordanův tvar matice 4×4 s jedním vlastním číslem a dvěma řetězci délky dva.
- 15.8 Jordanův tvar matice 3×3 , která má dvě vlastní čísla a není diagonalizovatelná.
- 15.9 Nalezení matice C tak, aby platilo $CAC^{-1} = B$, kde A, B jsou dvě podobné (nediagonalizovatelné) matice. Jordanův tvar matice 3×3 .

- 16.1 Obecná tvrzení o posloupnostech ortogonálních polynomů. Momentový funkcionál.
- 16.2 Hledání vlastních čísel a vlastních vektorů diferenciálního operátoru na prostoru funkcí jedné proměnné pomocí triku. Fyzikálně: nalezení vlastních stavů a energií speciálního jednorozměrného hamiltoniánu pomocí kreačních a anihilačních operátorů. Diracova notace.
- 16.3 Nalezení spektra diferenciálního operátoru na prostoru funkcí na \mathbb{R}^3 pomocí symetrií. Lieovy algebry $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(2)$; reprezentace $U(n)$, $SU(2)$. Symetrie hamiltoniánu atomu vodíku.
- 16.4 Spektrum diferenciálního operátoru na prostoru funkcí více proměnných pomocí rozkladu na operátory působící na prostorech jedné proměnné; kreační a anihilační operátory. Diagonalizace kvadratické formy. Tenzorové součiny (na příkladu funkcí). Fyzikálně: nalezení spektra anizotropního harmonického oscilátoru ve více dimenzích.
- 16.5 Reprezentace algebry operátorů. Nalezení hodnot, jichž může nabývat operátor momentu hybnosti.
- 17.1 Typy kvadrik v \mathbb{R}^3 . Určení typu kvadriky pomocí jejích invariantů (tj. určitých výrazů s determinanty).
- 17.2 Převod kvadriky na kanonický tvar pomocí vlastních čísel: osy kvadriky jsou vlastní vektory a jejich délky vlastní čísla matice kvadratické formy. Ortogonální transformace.
- 17.3 Diagonalizace konkrétní kvadratické formy na \mathbb{R}^3 řádkovými a sloupcovými úpravami. Typ kvadratické plochy.
- 17.4 Diagonalizace konkrétní kvadratické formy na \mathbb{R}^3 pomocí vlastních čísel. Typ kvadratické plochy.
- 17.5 Diagonalizace konkrétní kvadratické formy na \mathbb{R}^3 řádkovými a sloupcovými úpravami. Sylvestrovo kritérium.
- 17.6 Dva rychlé příklady na signaturu a pozitivní definitnost. Spektrální rozklad operátoru. Sylvestrovo kritérium.
- 17.7 Analytická geometrie v \mathbb{R}^n , obecný příklad.
- 17.8 Jak poznat, zda zadaný bod leží uvnitř n -dimenzionální sféry definované $n + 1$ body.
- 17.9 Rovnice všech tečen k jednodílnému hyperboloidu v \mathbb{R}^3 .

- 17.10 Rovnice tečen jednodílného hyperboloidu v \mathbb{R}^n . Diagonalizace kvadratické formy v \mathbb{R}^{n-1} .
- 18.1 Polární rozklad konkrétní matice 3×3 dvěma metodami. Význam vlastního vektoru u matice deformace.
- 18.2 Rozšíření věty o polárním rozkladu i na singulární matice.
- 18.3 Nejlepší řešení soustavy s více rovnicemi než proměnnými, která přesné řešení nemá. Teorie. Ortogonální projekce.
- 18.4 Aproximace metodou nejmenších čtverců. Řešení soustavy s více rovnicemi než proměnnými. Konkrétní příklad na pseudoinverzi matice $n \times 2$.
- 19.1 Složky konkrétního tenzoru typu $(2, 1)$. Transformace souřadnic. Symetrie tenzoru.
- 19.2 Příklad tenzoru typu $(0, 2)$ na \mathbb{R}^3 . Symetrie, transformace při změně báze. Duální báze.
- 19.3 Lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jako tenzor typu $(1, 1)$. Výpočet složek tenzoru setrvačnosti.
- 19.4 Fyzikální příklady tenzorů druhého řádu ze speciální relativity. Spouštění a zvedání indexů. Derivování.
- 19.5 Vzorečky pro Levi-Civitův tenzor ε_{ijk} (ověření transformačních vlastností). Tenzorový součin tenzorů, úžení tenzorů. Práce s determinanty.
- 19.6 Dimenze prostorů totálně symetrických a totálně antisymetrických tenzorů typu $(0, k)$. Symetrizovaný a antisymetrizovaný tenzorový součin.
- 19.7 Tenzorový součin operátorů. Stopa a částečná stopa (úžení tenzorů).
- 19.8 Antisymetrické tenzory, vnější algebra. Anulátor a rozložitelnost tenzorů.
- 20.1 Jak se chovají jednotlivé bloky blokových matic při násobení.
- 20.2 Odvození nejdůležitějších formulí týkajících se gaussovského integrování, nejjednodušší a nezákladnější úlohy vícerozměrné integrace. Je to instruktivní použití kombinace lineárně algebraických, analytických i kombinatorických úvah, vedoucích m.j. k objasnění role inverzní (korelační) matice.

- 20.4 Jednoduché, (téměř) jen kombinatorické odvození tvaru mocninné řady pro logaritmus.
- 20.5 Upozornění na roli největšího vlastního čísla (a příslušného vlastního vektoru) při výpočtech velkých mocnin matic.
- 20.6 Algebra násobení matic se čtyřmi bloky.
- 20.7 Diskuse, jak souvisí existence tzv. cyklického vektoru s jednoznačností Jordanových buněk. Teorie Jordanova tvaru pro pokročilejší.
- 20.8 Pomocná úloha: Výpočet zobecněného Vandermondova determinantu, kde k původním řádkům přistupují i jejich derivace. Navazuje na úlohu o cyklických vektorech.
- 20.9 Výpočet odmocniny z velmi jednoduché matice.
- 20.10 Pfaffián: vyjádření determinantu antisymetrické matice čtvercem.
- 20.11 Populační dynamika společnosti mužů a žen trochu podrobněji.
- 20.12 Resolventa: vše, co se o tomto důležitém pojmu dá říci v konečné dimenzi.
- 20.14 Rozsazení u kulatého stolu: jak výpočet stopy mocniny matice pomocí spektra pomáhá vyřešit netriviální kombinatorické i fyzikální problémy.
- 20.15 Symetrický cirkulant, tentokrát v převlečení za kvadratickou formu. K tomu jedna zdánlivě podobná, ve skutečnosti mnohem elementárnější úloha.
- 20.16 Přibližný výpočet $A^n x$: opět o roli vlastního vektoru příslušného největšímu vlastnímu číslu.
- 20.17 Ortogonalizace posloupnosti, cvičení na aplikaci Grammovy–Schmidtovy postupné ortogonalizace.
- 20.19 Goniometrický Vandermondův determinat, spočteno převedením na obyčejný Vandermondův determinant.
- 20.21 Systémy oscilátorů s nárazy, procvičení práce s pojmem exponenciála matice a Diracovou delta funkcí.
- 20.22 Studium chování nejjednoduššího vícerozměrného systému poblíž jeho bodu resonance, výpočet amplitudy řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic se sinusovou vnější silou.

- 20.23 Několik vhodných příkladů matic typu 3×3 na procvičení Jordanova tvaru (převzato ze sbírky Filippova).
- 20.24 K čemu všemu mohou sloužit řádkové úpravy matice, pokus o shrnutí typických situací, kde se takovéto úpravy používají.
- 20.25 I zkoumání zdánlivě tak jednoduché funkce, jakou je $ax^2 + bx$, dává zajímavé interpretace ve vícerozměrném případě, pro systémy velmi mnoha spřažených oscilátorů. Kvadratická forma definovaná jako “suma čtverců rozdílů hodnot sousedů” vede ke zkoumání teorie potenciálu na mříži. To má zajímavé souvislosti s pravděpodobností, konkrétně s teorií náhodných procházek.
- 20.27 Jak vypadá adjunkce k nilpotentnímu operátoru v jednom charakteristickém speciálním případě.
- 20.28 Jak poznat, že šestiúhelník v rovině je ortogonální projekcí krychle. Teoretická úloha.
- 20.29 Translačně invariantní kvadratické formy na mříži a jejich podmíněná minima (Coulombovy potenciály). Aplikace na problém (ne)vratnosti náhodné procházky a na otázku existence fázového přechodu příslušné gaussovské míry.