

Elektronový transport v kvantových systémech

Pavel Středa¹, Fyzikální ústav AVČR

Obsah:

1. Úvod	
Elektron jako vlnový balík	2
Nízko-rozměrné elektronové systémy	4
2. Kvantování konduktance a interferenční jevy	
Transport jako srážkový problém	7
Balistický kanál a kvantování konduktance	10
Konduktance a elektrický odpor	13
Jev lokalizace v kvazi-jednorozměrných vodičích	15
Lokalizace v kvazi-dvojměrných vodičích a vliv slabého magnetického pole	17
Aharonovův — Bohmův jev	22
3. Kvantové Hallovy jevy	
Kvantový Hallův jev — celočíselný	25
Hranové stavy a Aharonův-Bohmův jev	32
Zlomkový kvantový Hallův jev	33
Blochovy elektrony v kvantujícím magnetickém poli a Hallův jev	38
4. Tunelování elektronů	
Rezonanční tunelování	47
Coulombická blokáda	50
Jednoelektronový tranzistor a turniket	53
Josephsonovy jevy	55
5. Spinově polarizovaný transport	
Základní vlastnosti elektronů se spinem	58
Spinově závislé transportní vlastnosti ferromagnetických struktur	60
Vazba spinu s orbitálním momentem v polovodičových heterostrukturách	65

¹e-mail: streda@fzu.cz

1 Úvod

1.1 Elektron jako vlnový balík

Elektrony mají duální charakter. Na jedné straně vykazují vlastnosti charakteristické pro vlnu, na druhé straně se chovají jako částice konečných rozměrů. Jejich kvantově-mechanickým popisem je tedy vlnový balík, který lze charakterizovat dvěma základními parametry: vlnovou délkou λ majoritní vlny a velikostí vlnového balíku reprezentovanou koherentní délkou λ_ϕ .

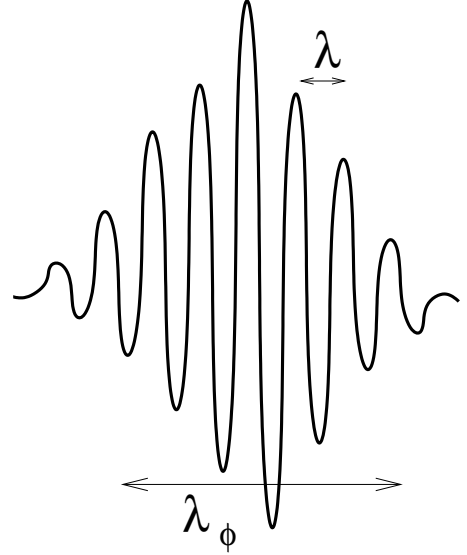
Klasickou analogií koherentní délky je střední vzdálenost, kterou částice urazí mezi dvěma po sobě následujícími neelastickými srážkami. Ty jsou vyvolány interakcí částice s dynamickými fluktuacemi prostředí, například s fonony, jejichž četnost roste s teplotou. Představu o teplotní závislosti koherentní délky λ_ϕ lze získat na základě čistě klasické úvahy. Předpokládejme, že je elektron v čase $t = 0$ lokalizován v bodě $\vec{r} = (0, 0, 0)$. S rostoucím časem se od své počáteční polohy vzdaluje. Předpokládejme, že díky elastickému rozptylu, který nenarušuje koherenci, koná v prostoru náhodný pohyb. Ten lze popsat pomocí difúzní rovnice a rovnice kontinuity, které mají pro homogenní systémy následující obecný tvar:

$$\vec{j} = eD \vec{\nabla} n(t, \vec{r}) \quad ; \quad e \frac{dn(t, \vec{r})}{dt} = \text{div} \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{dn(t, \vec{r})}{dt} = D \Delta n(t, \vec{r}), \quad (1)$$

kde e označuje absolutní hodnotu náboje elektronu, D je difúzní koeficient, \vec{j} je proudová hustota a $n(t, \vec{r})$ je pravděpodobnost, že se částice v čase t bude nacházet v poloze \vec{r} . Řešením je distribuční funkce

$$n(t, \vec{r}) = (4\pi Dt)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}, \quad (2)$$

kteřá reprezentuje klasický popis rozplývání vlnového balíku s časem, jevu známého z kvantové mechaniky. Při neelastické srážce částice změní energii. Vzhledem k jejímu vlnovému charakteru je změna energie doprovázena změnou vlnové délky λ a dojde tak ke ztrátě koherence. Označme dobu, za kterou v průměru dojde k jedné neelastické srážce elektronu jako τ_ϕ . Při nízkých teplotách lze předpokládat, že se jedná o srážky kvazi-elastické, které jen málo mění energii elektronu. Ty jsou však možné pouze tehdy, jsou-li v těsné blízkosti stavu elektronu stavy neobsazené. Jsou tedy omezeny na oblast energetického intervalu $k_B T$ v okolí Fermiho meze a τ_ϕ je tedy nepřímo úměrné $k_B T$. Času τ_ϕ odpovídá pološířka



Obrázek 1: Schematické znázornění vlnového balíku.

elektronové distribuční funkce (2), kterou lze ztotožnit s velikostí vlnového balíku. Pro koherentní délku λ_ϕ dostaneme

$$\lambda_\phi^2 \equiv 4D\tau_\phi \quad ; \quad \tau_\phi \sim \frac{\hbar}{2k_B T} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\phi \sim \sqrt{\frac{\hbar D}{k_B T}}. \quad (3)$$

Uvedený model dobře charakterizuje velmi neuspořádané systémy, ve kterých je pohyb elektronů možno považovat za difúzní a koherentní délka λ_ϕ je mnohem větší, než střední volná dráha elektronu λ_e . Ta je definována jako střední vzdálenost, kterou elektron urazí, než je změnu směru jeho pohybu vyvolanou elastickými srážkami možno považovat za náhodnou. Výše popsany model je velmi zjednodušený. Obecně závisí doba mezi neelastickými srážkami na všech excitacích, které se v daném prostředí mohou vyskytovat a jsou ovlivňovány jak rozměrovými efekty tak i vzájemnou interakcí elektronů. Popsaná teplotní závislost je však schopna alespoň kvalitativně vysvětlit podstatnou část měřených závislostí na neuspořádaných kovových systémech za velmi nízkých teplot.

Difúzní koeficient D úzce souvisí s vodivostí σ . Vyjádříme-li gradient elektronové hustoty jako součin hustoty stavů na Fermiho mezi $g(E_F)$ a gradientu chemického potenciálu μ , můžeme difúzní rovnici psát v následujícím tvaru

$$\vec{j} = e D \vec{\nabla} n(\vec{r}) = e^2 D g(E_F) \frac{\vec{\nabla} \mu}{e} \equiv \sigma \vec{\mathcal{E}} \quad ; \quad \frac{\vec{\nabla} \mu}{e} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}, \quad (4)$$

kde elektrické pole $\vec{\mathcal{E}}$ bylo ztotožněno s $\vec{\nabla} \mu/e$. Tato substituce je v souladu se závěrem obecné teorie elektronového transportu, že lineární odezva na elektrické pole musí být stejná jako odezva na gradient chemického potenciálu. Této ekvivalence bude v následujícím výkladu často využíváno. Vztah mezi vodivostí σ a difúzním koeficientem D definovaný rovnicí (4) je obvykle nazýván jako Einsteinova relace. V systému částic nesoucích elektrický náboj vyvolá elektrické pole vždy nenulový gradient nábojové hustoty a elektrické pole je tedy vždy doprovázeno gradientem chemického potenciálu. Připomeňme, že měřený napěťový rozdíl je dán rozdílem elektro-chemických potenciálů, a měla by tedy být studována odezva na gradient elektro-chemického potenciálu, tedy na $\vec{\mathcal{E}} + \vec{\nabla} \mu/e$. Vzhledem k ekvivalenci lineární odezvy systému na obě složky gradientu elektro-chemického potenciálu postačí analyzovat odezvu pouze na jednu z nich, i když odpovídající teoretické popisy bývají formálně velmi odlišné.

Velikost vlnového balíku popisujícího elektron se zvětšuje s klesající teplotou. Svědčí o tom experimenty založené na sledování interferenčních jevů, typických pro koherentní systémy. Neelastické srážky mění energii elektronu, jeho vlnovou délku, a jedním z důsledků jejich potlačování je rostoucí vliv interference na elektronový transport s klesající teplotou.

Projevy vlnového charakteru elektronů jsou potlačovány i jejich vzájemnou interakcí. Vzhledem k tomu, že se jedná o nabitě částice, je to především coulombická interakce. Ta vede k efektivní lokalizaci elektronů, jinými slovy ke zmenšování koherentní délky. Důsledkem je například Wignerova krystalizace, při které elektronový plyn přejde do krystalického stavu. Typickým projevem je i tzv. coulombická blokáda.

Kvantový charakter elektronového transportu se silně projeví, vyřizneme-li ze systému, ve kterém má elektron koherentní délku λ_ϕ , vzorek o rozměrech srovnatelných s λ_ϕ . V takovém případě mluvíme o tzv. mezoskopických systémech. Již z definice je zřejmé, že se jedná o systémy, ve kterých je silně potlačen neelastický rozptyl, a tedy i disipace energie. Nelze tedy použít principu lokální rovnováhy, který je výchozím předpokladem pro popis nerovnovážných procesů v makroskopických systémech. K disipaci energie bude tedy zřejmě docházet především až v elektrických přívodech, které jsou makroskopických rozměrů. Adekvátním popisem je teorie Landauera-Büttikera, která popisuje elektronový transport jako rozptylový problém a elektrický proud je určován jako odezva systému na rozdíl chemických potenciálů mezi přívoody. Typickými projevy vlnového charakteru elektronů v mezoskopických systémech je slabá lokalizace a Aharonův-Bohmův jev, které jsou důsledkem interferenčních jevů.

Pokud jsou některé rozměry vzorku srovnatelné s vlnovou délkou λ , je energetické spektrum elektronů silně modifikováno rozměrovým kvantováním. Rozdíl energií ΔE mezi nejbližšími hladinami roste s klesajícími rozměry vzorku. Pokud bude ΔE větší, než je tepelná energie $k_B T$, bude také transport elektronů rozměrovým kvantováním ovlivněn. Základním projevem je kvantování konduktance, která je definována jako převrácená hodnota odporu vzorku. Také kvantování energie elektronů magnetickým polem bude mít při nízkých teplotách významný efekt, jehož důsledkem je i kvantový Hallův jev.

Cílem tohoto pojednání není podrobný a důsledný výklad výše zmíněných jevů, ale vysvětlení jejich fyzikální podstaty na základě jednoduchých modelových systémů.

1.2 Nízko-rozměrné elektronové systémy

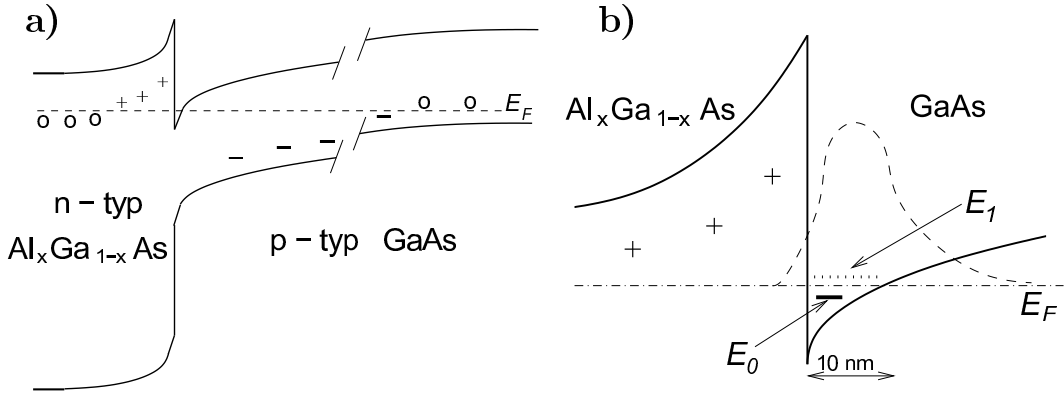
Systémy malých rozměrů, ve kterých hraje významnou roli rozměrové kvantování, se vyskytují i v přírodě. Jsou to například whiskery, makromolekuly a především uhlíkové struktury (fulereny, uhlíkové trubičky tzv. carbon nanotubes, uhlíkové jedno- a víceatomové vrstvičky tzv. graphene). Významné jsou uměle vytvářené systémy, které umožňují získávat struktury požadovaných vlastností. Základem jsou tenké vodivé vrstvičky z nichž se pomocí litografických metod "vyřezávají" požadované struktury.

Nejtenčími vodivými vrstvičkami jsou dvojrozměrné elektronové systémy, které jsou vytvářeny na rozhraní dvou nevodivých materiálů. První struktura s dvojrozměrným elektronovým plynem byla vytvořena zdokonalením součástky Si-MOS FET, polem řízeného transistoru. Tato vrstevnatá struktura je tvořena vhodně dopovaným křemíkem, který je při nízkých teplotách nevodivý. Ten je pokryt vrstvou izolátoru SiO_2 a dále i kovovou vrstvou, hradlem. Je-li na hradlo vloženo dostatečně velké napětí, elektrické pole napříč vrstevnatým systémem vytvoří na rozhraní mezi křemíkem a izolátorem trojúhelníkovou potenciálovou jámu, ve které dojde k hromadění nositelů náboje, elektronů případně děr. Ty se mohou pohybovat volně podél rozhraní, ale ve směru kolmém jsou vázány ve stavech daných tvarem potenciálové jámy. Ve směru kolmém jsou tedy energetické stavy kvantovány, s energií odpovídající vázaným modům (E_n , $n=0,1,\dots$). Vlastní energii elektronů pak

můžeme psát ve tvaru

$$E_n(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + E_n, \quad (5)$$

kde m^* je efektivní hmotnost a $\vec{k} \equiv (k_x, k_y)$ označuje dvojrozměrný vlnový vektor. Vliv periodického potenciálu je zahrnut v přiblížení efektivní hmotnosti, které je možno použít tehdy, je-li vlnová délka elektronů $\lambda = 2\pi/k$ mnohem větší než mřížková konstanta. Tato podmínka je splněna v okolí hran energetických pásů a je tedy aplikovatelná především na polovodičové materiály. Obecně nemusí být efektivní hmotnost izotropní, jak je pro zachování jednoduchosti předpokládáno. Pokud je koncentrace nositelů dostatečně nízká, aby byly obsazeny pouze stavy s nejnižší energií vázaného modu E_0 , mluvíme o dvojrozměrném elektronovém plynu. V případě, že jsou obsazeny i stavy s vyššími energiemi vázaných modů, jedná se o tzv. kvazi-dvojrozměrné systémy. Podobné elektronové systémy lze realizovat i v celé řadě dalších vrstevnatých struktur.



Obrázek 2: a) Schéma průběhu hran pásů zakázaných energií napříč heterostrukturou $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$. Prázdné kroužky označují neionizované příměsové hladiny, + ionizované donory a - ionizované akceptory. b) Detail okolí trojúhelníkové potenciálové jámy tvořené hranou vodivostního pásu. Čárkovanou čarou je znázorněna vlnová funkce nejnižšího transverzálního módu s energií E_0 .

Významné místo v přípravě dvojrozměrných elektronových systémů zaujímá technologie molekulární epitaxe, která umožňuje kontrolovaně růst vrstevnaté struktury po jednotlivých atomových rovinách. Vhodným dopováním lze na rozhraní dvou polovodičů s různou šířkou pásů zakázaných energií vytvořit také trojúhelníkovou potenciálovou jámu, jak je znázorněno na Obr. 2. Vzhledem k tomu, že rozhraní je téměř dokonalé, atomové roviny jednoho z polovodičů jsou vystřídány rovinami druhého, mají nositelé náboje vysokou pohyblivost. Na rozhraní mezi GaAs a $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ bylo dosaženo nejvyšších hodnot elektronové pohyblivosti, řádu $10^7 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ pro elektronové koncentrace $\sim 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. Přidáním kovové vrstvy, podobně jako u součástky typu MOS FET, lze přiloženým napětím měnit hloubku potenciálové jámy, a tedy i koncentraci nositelů. Vzhledem k tomu, že pás zakázaných energií $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ je mnohem širší než pás v GaAs, je elektronový plyn

umístěn v atomových vrstvách GaAs a jeho efektivní hmotnost je dána prostředím GaAs, $m^* = 0,067 m_0$. Vrstvičku GaAs tvořeného několika atomovými vrstvami lze také umístit mezi vrstvy $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ a tím vytvořit dvojrozměrný plyn s jiným tvarem potenciálové jámy. Na rozdíl od jednorozměrných i třírozměrných systémů nezávisí hustota stavů na energii. Je dána konstantou $2m^*/(h\hbar)$, ve které faktor 2 reprezentuje spinovou degeneraci.

Litografické metody, především kombinace optické a elektronové litografie, umožňují selektivní odleptávání vrstevnatých struktur a vytváření vodivých struktur nejrůznějších tvarů majících charakteristické rozměry několika desítek nanometrů. Různé tvary vodivých struktur lze vytvořit i pomocí vytvarovaného hradla. Přiložením vhodného napětí, lze z oblasti pod hradlem vytlačit elektronový plyn a tak formovat vodivou strukturu na polovodičovém rozhraní. Byly to právě dvojrozměrné systémy na bázi vrstevnatých struktur tvořených $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ a GaAs, na kterých byla demonstrována většina jevů kvantového transportu v té nejčistší podobě.

Pro získání představy, jak malé musí být vzorky, aby na nich byl pozorovatelný vliv rozměrového kvantování, uvažujme čtvercový vzorek o hranách délky L vyříznutý z dvojrozměrného elektronového systému. Vlastní hodnoty energie takové dvojrozměrné potenciálové jámy, nekonečně hluboké, jsou

$$E(n_x, n_y) = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n_x^2 + n_y^2)}{2m^* L^2}, \quad (6)$$

kde n_x a n_y nabývají celočíselných hodnot. Vlivem konečnosti vzorku dochází ke kvantování původního spojitého spektra, $(k_x, k_y) \rightarrow \pi(n_x, n_y)/L$. Průměrná vzdálenost mezi energetickými hladinami je přibližně dána následujícím výrazem

$$\Delta E \sim \frac{\hbar^2 \pi}{2m^* L^2}. \quad (7)$$

Pro elektronový plyn v GaAs a jámu o straně $L = 0,1 \mu\text{m}$ je $\Delta E \sim 0,089 \text{ meV}$. Vzhledem k tomu, že tepelná energie $k_B T \sim 0,086 \text{ meV} \cdot T[\text{K}]$, lze usoudit, že pro takový systém ochlazený na teplotu 1 K, lze vliv rozměrového kvantování pozorovat na vzorcích o rozměrech cca 100 nm. Vzorky o rozměrech větších než $1 \mu\text{m}$ lze pak spíše považovat za vzorky makroskopické.

Velmi malá efektivní hmotnost elektronů v GaAs umožňuje pozorovat projevy kvantového transportu ve strukturách relativně velkých rozměrů. Například šířka potenciálové jámy s dvojrozměrným elektronovým plynem může být i 10 nm, tedy obsahovat několik desítek atomových vrstev GaAs. Materiály, v nichž je efektivní hmotnost elektronů větší, vyžadují vytvářet struktury menších rozměrů.

Jediným známým přírodním systémem s dvojrozměrným elektronovým plynem je graphene, jednoatomová vrstvička atomů uhlíku s krystalovou strukturou včelí plástve. Stočením do trubičky o průměru několika nanometrů vznikne jednorozměrný systém, kvantový drát. Na rozdíl od uměle vytvářených struktur na bázi polovodičů si udržují svůj nízkorozměrný charakter až do pokojových teplot.

Dvojrozměrný elektronový plyn lze indukovat například i na povrchu kapalného ^4He vloženým napětím [1, 2]. Pokud není vložené napětí příliš vysoké, dojde k vytvoření elektronové vrstvičky nad povrchem helia a hmotnost elektronů odpovídá v tomto případě

hmotnosti volných elektronů, m_0 . Typické koncentrace elektronů jsou řádu několika jednotek 10^8 cm^2 . Dominantními interakcemi jsou interakce s dynamickými excitacemi na povrchu kapalného helia a s atomy heliového plynu nad kapalinou. Snižováním teploty dochází k potlačování četnosti srážek a při teplotě pod 0,1 K je tlak nasycených heliových par prakticky nulový a jediným srážkovým mechanismem zůstávají tepelně excitované výškové variace povrchu supratekutého ^4He . Za těchto podmínek je dosahováno extrémně vysoké pohyblivosti, až $10^8 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Díky silnému vlivu coulombické interakce se však elektrony chovají více méně jako klasické částice a při dostatečně nízkých teplotách vytvářejí trojúhelníkovou krystalickou strukturu [3]. Jedná se o jev tzv. Wignerovy krystalizace. Při překročení kritické hodnoty vkládaného napětí se elektrony vnoří do kapaliny a vznikají poměrně silně lokalizované povrchové stavy tvořící dvojrozměrný elektronový systém s velmi nízkou pohyblivostí.

2 Kvantování konduktance a interferenční jevy

2.1 Transport jako srážkový problém

Nejjednodušším systémem vykazujícím kvantové transportní vlastnosti je tzv. kvantový drát, o jehož průřezu předpokládáme, že je nanometrických rozměrů. Pro studium jeho transportních vlastností je nutno jeho konce spojit s baterií elektrickými přívody, které jsou dobrými kovovými vodiči makroskopických rozměrů. Hustota stavů v přívodech je tedy mnohem větší než v samotném vzorku a přívody spolu s kontakty lze považovat za rezervoáry nosičů náboje, elektronů. Rozdíl chemických potenciálů na kontaktech, přesněji elektro-chemických potenciálů, vyvolá tok elektronů, daný tendencí celého systému docílit celkové rovnováhy, vyrovnat hodnoty potenciálů v přívodech. Elektrony mohou vzorkem projít, nebo se odrazit od rozptylových center uvnitř vzorku a vrátit se zpět do přívodu, kterým se do vzorku dostaly.

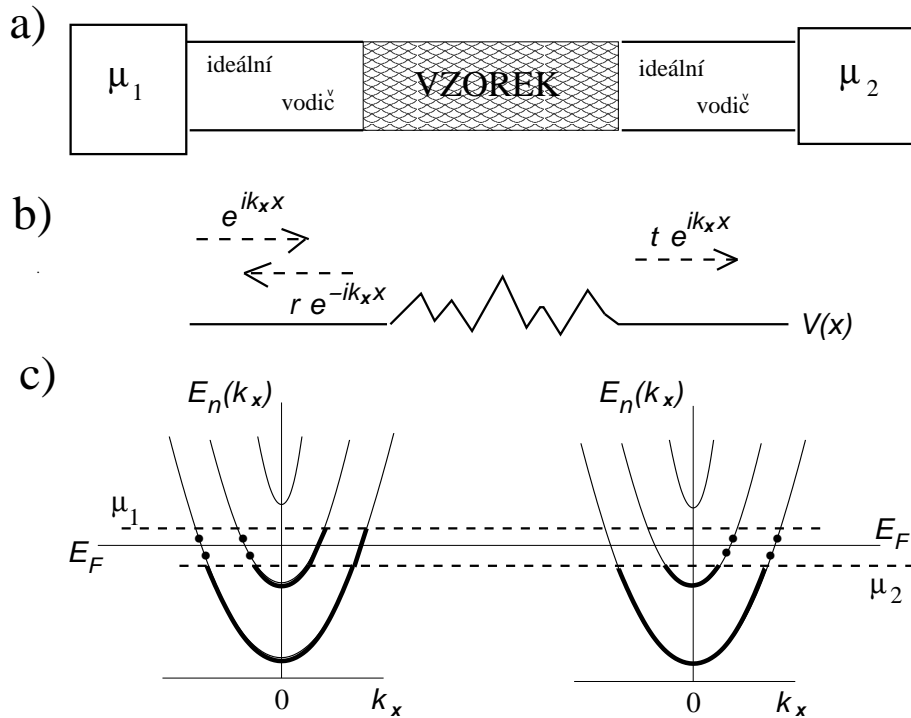
Kvantově-mechanický popis takového procesu vyžaduje existenci oblastí, pro které jsme schopni přesně definovat elektronové stavy. Z toho důvodu se pro popis transportu nahrazuje reálný systém systémem, ve kterém jsou mezi studovaný vzorek s potenciálovými nehomogenitami a elektrické kontakty vloženy tzv. ideální přívody, jak je znázorněno na Obr. 3a. Jsou to homogenní kvantové dráty o stejném průřezu jako studovaný drát, ve kterých nedochází k rozptylu elektronů, jsou to tedy ideální vodiče.

Vlastní stavy ideálních vodičů jsou v \vec{r} -reprezentaci dány součinem rovinné vlny ve směru osy drátu, řekněme ve směru \hat{x} , a transverzálních modů $\chi_n(y, z)$

$$\Psi_{n,k_x}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{ik_x x} \chi_n(y, z). \quad (8)$$

Vlastní hodnoty energie $E_n(k_x)$ a střední hodnoty rychlosti $v_n(k_x)$ jsou dány vztahy

$$E_n(k_x) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + E_n \quad ; \quad v_n(k_x) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_n(k_x)}{dk_x} = \frac{\hbar k_x}{m^*}. \quad (9)$$



Obrázek 3: Schéma elektronového transportu jako srážkového problému. Na obrázku c) jsou zobrazena energetická spektra v ideálních přívodech. Silně jsou vyznačeny obsazené stavy.

Energetické spektrum je složeno z větví, které jsou funkcí k_x . Jejich minima jsou určena transversálními módy danými tvarem potenciálové jámy, která definuje i průřez vodiče. Ze symetrie vzhledem k inverzi času obecně vyplývá, že energie je sudou funkcí k_x na rozdíl od rychlosti, která je funkcí lichou. Z levého kontaktu, rezervoáru, se do studovaného vzorku dostávají elektrony s kladnou rychlostí, $k_x > 0$, zatímco elektrony vstupující zprava, mají rychlost opačnou a $k_x < 0$.

Uvažujme elektron v levém ideálním přívodu ve stavu charakterizovaném vlnou $|n, k_x\rangle$ s kladnou hodnotou k_x , který se tedy pohybuje zleva doprava. Potenciálové fluktuační uvnitř vzorku jsou zodpovědné za elastický rozptyl elektronu, jak je schematicky znázorněno na Obr. 3b pro případ jednorozměrného vodiče s potenciálem $V(x)$. Elektronová vlna částečně projde vzorkem do stavu daného lineární kombinací vlastních funkcí $|n', k'_x\rangle$ pravého ideálního přívodu. Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze elastický rozptyl, jedná se o stavy se stejnou energií jako má vlna přicházející, $E_n(k_x)$. Vlna odcházející pravým přívodem bude mít pak následující obecný tvar

$$\Psi_{n,k_x}^{(2)}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{n'} t_{n,n'} e^{ik_x^{(n')}x} \chi_{n'}(y, z) \quad ; \quad E_n(k_x) = E_{n'}(k_x^{(n')}), \quad (10)$$

kde $k_x^{(n')} > 0$ označuje vlnové číslo stavu v n' -té větvi energetického spektra, který má

stejnou energii jako vlna přicházející, $|n, k_x\rangle$. Transmisní amplitudy $t_{n,n'}$ jsou dány rozptylem přicházející vlny do stavů $|n', k_x^{(n')}\rangle$ a index 2 označuje, že se jedná o stav v pravém ideálním přívodu. Část přicházející vlny se odrazí zpět a vlnová funkce v levém ideálním přívodu, označená indexem 1, bude složena z vlny přicházející a odražené

$$\Psi_{n,k_x}^{(1)}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left\{ e^{ik_x x} \chi_n(y, z) + \sum_{n'} r_{n,n'} e^{-ik_x^{(n')} x} \chi_{n'}(y, z) \right\}, \quad (11)$$

kde stavy $|n', k_x^{(n')}\rangle$ v tomto případě označují vlastní stavy v levém ideálním přívodu se zápornou hodnotou vlnového čísla $k_x^{(n')}$. Reflexní amplitudy $r_{n,n'}$ i transmisní amplitudy $t_{n,n'}$ jsou dány řešením Schrödingerovy rovnice, které vyhovuje asymptotickým tvarům vlnových funkcí v ideálních přívodech danými vztahy (10) a (11). Amplitudy jsou obecně komplexní čísla, protože při rozptylu může docházet ke změně fáze vlnové funkce.

Pravděpodobnost $T_n(k_x)$, že dopadající elektron ve stavu $|n, k_x\rangle$ projde vzorkem, je pak dána následujícím vztahem

$$T_n(k_x) = \sum_{n'} |t_{n,n'}|^2 = \sum_{n'} |t_{n',n}|^2. \quad (12)$$

Pro vlnu přicházející ke vzorku zprava se amplitudy rozptýlených vln mohou obecně lišit, ale díky symetrii vzhledem k časové inverzi, pravděpodobnost průchodu na směr nezávisí

$$T_n(k_x) = T_n(-k_x). \quad (13)$$

Poznamenejme, že pro uvažovaný elastický rozptyl je závislost pravděpodobnosti $T_n(k_x)$ na vlnovém čísle k_x dána hodnotou k_x pro danou energii a pravděpodobnost $T_n(k_x)$ je tedy funkcí energie $E_n(k_x)$, $T_n(k_x) = T_n(E_n(k_x))$.

Za předpokladu, že chemický potenciál μ_1 v levém kontaktu je větší než μ_2 v kontaktu pravém, je obsazení stavů v ideálních přívodech schematicky zobrazeno na Obr. 3c. Za teploty absolutní nuly jsou stavy až do energie μ_2 plně obsazené a stavy s energií větší než μ_1 jsou prázdné. V energetickém intervalu $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$, mezi hodnotami chemických potenciálů μ_2 a μ_1 , je obsazení stavů v ideálních přívodech odlišné. V levém ideálním přívodu jsou všechny stavy s kladnou hodnotou rychlosti obsazeny až po energii danou chemickým potenciálem μ_1 a obsazení stavů s opačnou rychlostí je dáno pravděpodobností zpětného rozptylu studovaným vzorkem. V pravém ideálním přívodu zůstávají stavy se zápornou rychlostí prázdné a pravděpodobnost obsazení stavů s kladnou hodnotou rychlosti je dána pravděpodobností $T_n(k_x)$, že elektron studovaným vzorkem projde. Za nenulové teploty je obsazení stavů modifikováno Fermiho-Diracovou rozdělovací funkcí $f_0(E - \mu)$ a celkový elektrický proud J je dán rozdílem proudu elektronů, které projdou vzorkem zprava a zleva

$$J = \frac{e}{2\pi} \sum_n \int_0^{+\infty} [f_0(E_n(k_x) - \mu_1) - f_0(E_n(k_x) - \mu_2)] T_n(k_x) v_n(k_x) dk_x, \quad (14)$$

kde e označuje absolutní hodnotu náboje elektronu.

V lineárním přiblížení pro případ nízkých teplot, t.j. za předpokladu, že $\Delta\mu$ i $k_B T$ jsou natolik malé, aby bylo možno v těchto energetických intervalech zanedbat dispersi pravděpodobnosti průchodu a nahradit ji hodnotou na Fermiho mezi, $T_n(k_x) \rightarrow T_n(E_F)$, dostaneme

$$J = \frac{e}{2\pi} \sum_n \int_{E_n}^{+\infty} \frac{df_0}{d\mu} \Delta\mu T_n(E_F) \frac{v_n(k_x)}{\frac{dE_n(k_x)}{dk_x}} dE = \frac{e^2}{h} \sum_n T_n(E_F) \frac{\Delta\mu}{e}. \quad (15)$$

Tento vztah platí pro libovolný disperzní zákon, tedy jakoukoliv funkční závislost energie $E_n(k_x)$ na vlnovém čísle k_x .

Měřený napěťový rozdíl U mezi kontakty je dán rozdílem elektro-chemických potenciálů, $U \equiv \Delta\mu/e$. Pro konduktanci G , definovanou jako převrácená hodnota celkového odporu, dostaneme

$$G \equiv \frac{J}{U} = \frac{eJ}{\Delta\mu} = \frac{e^2}{h} \mathcal{T}(E_F) \quad ; \quad \mathcal{T}(E_F) \equiv \sum_n T_n(E_F) = \text{Tr}(tt^+), \quad (16)$$

kde t označuje matici amplitud $t_{n,n'}$. Takto definovaná konduktance se obvykle nazývá dvouterminálovou konduktancí, protože studovaný vzorek má pouze dva elektrické kontakty, terminály. Je přímo úměrná transmisnímu koeficientu $\mathcal{T}(E_F)$, který je bezrozměrnou veličinou. Konstanta úměrnosti je dána poměrem základních fyzikálních konstant, absolutní hodnotou náboje elektronu e a Planckovy konstanty h . Její převrácenou hodnotu lze tedy považovat za kvantově-mechanickou jednotku odporu

$$\frac{h}{e^2} = 25\,812,807 \pm 0,005 \, \Omega. \quad (17)$$

2.2 Balistický kanál a kvantování konduktance

Uvažujme vzorek ve formě ideálního kvazi-jednorozměrného vodiče, který neobsahuje žádná rozptylová centra. V takovém případě nedochází ke zpětnému rozptylu a pravděpodobnosti $T_n(k_x)$ průchodu vzorkem jsou rovny jedné. Jedná se o tzv. balistický transport. Transmisní koeficient nabývá celočíselných hodnot, $\mathcal{T}(E_F) \rightarrow i$, kde i je celé číslo dané počtem větví energetického spektra, které procházejí Fermiho energií E_F , tzv. vodivých kanálů. Transmisní koeficient má v závislosti na energii schodovitou závislost s celočíselnou výškou stupňů. Za předpokladu, že rozdíly chemických potenciálů $\Delta\mu$ i teploty ΔT mezi elektrickými kontakty jsou dostatečně malé, lze proud J určit jako lineární odezvu na oba rozdíly. Rozvojem Fermiho-Diracových funkcí v obecné vztahu (15) dostaneme

$$J = \frac{e}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_0}{d\mu} \mathcal{T}(E) \left(\frac{E - \mu}{T} \Delta T + \Delta\mu \right) dE, \quad (18)$$

kde T a μ označují průměrnou teplotu a chemický potenciál. Za předpokladu, že $\Delta T = 0$, je tzv. dvouterminálová konduktance dána následujícím výrazem:

$$G(\mu, T) \equiv \frac{eJ}{\Delta\mu} = \frac{e^2}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_0}{d\mu} \mathcal{T}(E) dE. \quad (19)$$

V limitě $T \rightarrow 0$ se výraz redukuje na tvar daný vztahem (16) a konduktance nabývá kvantových hodnot

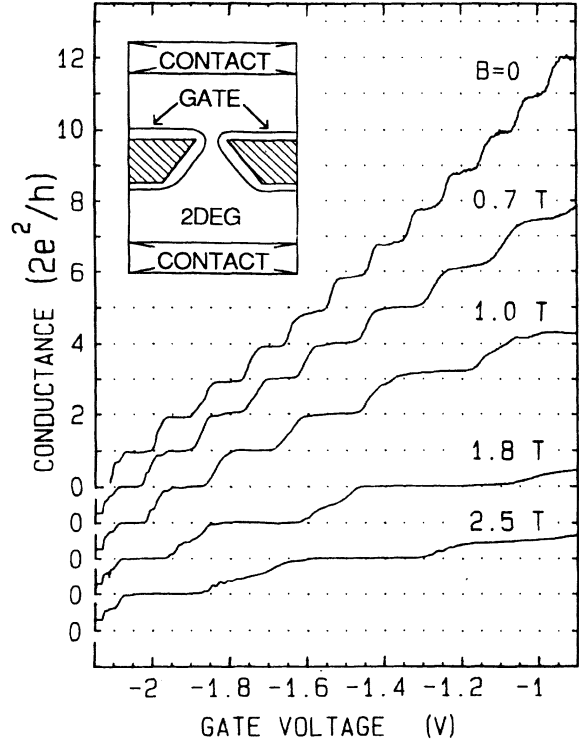
$$G = \frac{e^2}{h} i. \quad (20)$$

Konduktance balistického vodiče je dána pouze počtem větví energetického spektra, které procházejí Fermiho energií.

Kvantování konduktance bylo poprvé ověřeno na vzorku ve formě bodového kontaktu [4]. Dvojměrný elektronový plyn v heterostruktuře GaAs/Al_xGa_{1-x}As byl rozdělen pomocí hradla na dvě části spojené štěrbinou, jak je zobrazeno na schématu vloženém do Obr. 4. Záporné napětí vložené na hradlo vytlačí elektronový plyn z oblasti pod hradlem. Je-li dostatečně vysoké, vytlačí i elektrony z oblasti štěrbin. Pozvolným snižováním jeho hodnoty se štěrbina otvírá. Výsledný efekt je stejný, jako kdyby se zvyšovala Fermiho energie a rostl tak počet větví energetického spektra, které ji protínají. Závislost konduktance na napětí vloženém na hradlo má pak schodovitý tvar, jak je vidět z experimentálních dat na Obr. 4. Pro případ nulového magnetického pole je výška stupňů vždy $2e^2/h$ díky spinové degeneraci větví energetického spektra. Magnetické pole B aplikované ve směru kolmém na vzorek modifikuje rozměrové kvantování dané šířkou štěrbinou, zvětšuje energetické rozdíly mezi transversálními módy a šířka stupňů se zvětšuje. V nejsilnějších polích je pak u některých stupňů pozorovatelný jejich rozpad na dva o výšce e^2/h , který je způsoben sejmutím spinové degenerace transversálních módů v důsledku Zeemanovského rozštěpení hladin.

Unikátním, téměř dokonalým, jednorozměrným kvantovým drátem jsou uhlíkové trubičky, jejichž konduktance si zachovává kvantovou hodnotu $2e^2/h$ až do pokojových teplot [5]. Na rozdíl od klasických vodičů, konduktance ideálních kvantových drátů, a tedy ani celkový odpor, nezávisí na délce vodiče. Je určena maximální schopností jednoho vodičového kanálu, větve energetického spektra, vést elektrický proud. Minimální odpor každého z kanálů je určen právě kvantově-mechanickou jednotkou elektrického odporu h/e^2 .

Ze vztahu (18) lze odvodit i závislost termoelektrické síly $S(\mu, T)$ na chemickém poten-



Obrázek 4: Konduktance bodového kontaktu v závislosti na hradlovém napětí (gate voltage) pro heterostrukturu GaAs/Al_xGa_{1-x}As s dvojměrným elektronovým plynem (2DEG) měřená za teploty $T=4,2$ K.

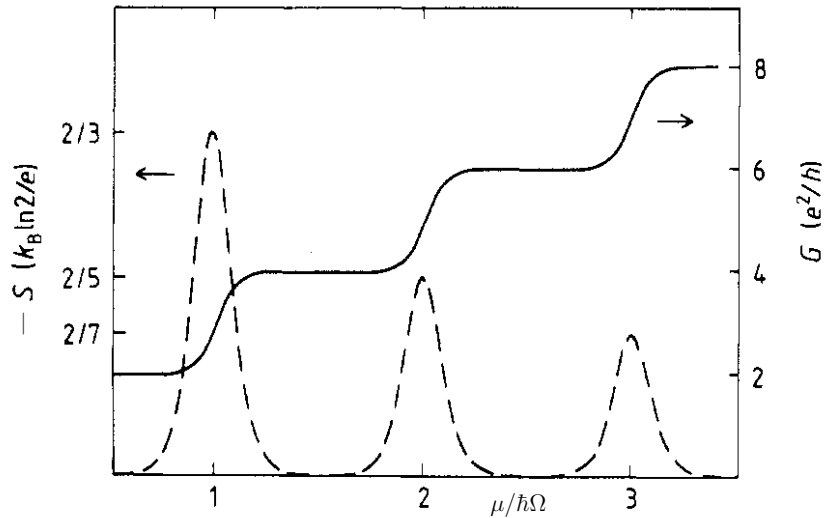
ciálu. Ta je určena podmínkou, že proud vzorkem je nulový ($J = 0$), ze které plyne

$$S(\mu, T) \equiv \frac{\Delta\mu}{e\Delta T} = -\frac{k_B}{e} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_0}{d\mu} \mathcal{T}(E) \frac{E-\mu}{k_B T} dE}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_0}{d\mu} \mathcal{T}(E) dE}. \quad (21)$$

Za předpokladu, že rozdíl energií vázaných modů je mnohem větší než tepelná energie $k_B T$, vykazuje závislost termoelektrické síly na energii oscilace s maximy pro energie právě rovné energiím vázaných modů. Jsou-li transversální módy spinově degenerovány, $i = 2m$, kde m je celé číslo, nabývají maxima následujících kvantovaných hodnot

$$S_m^{\max} = -\frac{k_B}{e} \frac{\ln(2)}{m + \frac{1}{2}} \approx -\frac{60}{m + \frac{1}{2}} \quad (\mu\text{VK}^{-1}). \quad (22)$$

Charakteristická závislost konduktance a termoelektrické síly na chemickém potenciálu, který definuje elektronovou koncentraci, je na Obr. 5. Podobný schodovitý průběh jako konduktance G má i elektronová tepelná konduktance daná vztahem $(\pi k_B/e)^2 T G/3$, který je důsledkem platnosti Wiedemannova-Franzova zákona.



Obrázek 5: Vypočtená závislost konduktance G (plná čára) a termoelektrické síly S (čárkovaná čára) na chemickém potenciálu μ pro balistický vodič s ekvidistantními energiemi transversálních modů, $E_m = m \hbar\Omega$ ($k_B T/\hbar\Omega = 0,05$). Díky uvažované spinové degeneraci mají stupně v konduktanci výšku $2e^2/h$.

Na bodových kontaktech byly ověřovány i popsané vlastnosti termoelektrické síly a tepelné konduktance. Odchytky experimentálně měřených hodnot maxim termoelektrické síly od hodnot daných vztahem (22) byly zhruba desetiprocentní [6]. Také hodnoty tepelné konduktance byly v soulase s teoretickou předpovědí [7]. Je třeba se zmínit, že i za nízkých

teplot může být termoelektrická síla v některých materiálech modifikována tzv. fononovým unášením, které nebylo bráno v úvahu.

Základním předpokladem pro popis balistického transportu elektronů bylo, že nositeli náboje, jak v proudových přívodech tak i ve vzorku, jsou elektrony. Situace se změní, pokud jeden z přívodů bude supravodivý. Nositeli náboje v něm jsou Cooperovy páry, tvořené dvěma elektrony s opačným spinem i momentem. Na rozhraní mezi elektronovým plynem a supravodičem pak dochází k tzv. Andrejevovu odrazu [8]. Aby elektron vstupující do supravodiče mohl vytvořit Cooperův pár musí přibrat další elektron. Ten vznikne excitací v blízkosti Fermiho meze, při které se vytvoří pár elektronu a díry. Z důvodu zachování celkové hybnosti má díra opačný moment než vyexcitovaný elektron, díra se vrací balistickým kanálem, pryč od supravodivého přívodu a tím zvyšuje celkový proud kanálem. Bylo by tedy možno očekávat, že konduktance bude dvakrát větší než v případě, že oba přívody budou nesupravodivé. Ačkoliv bylo zvýšení konduktance na různých strukturách se supravodivými přívody pozorováno, teoretická předpověď zdvojnásobení konduktance v případě balistického vodiče či bodového kontaktu nebyla experimentálně potvrzena.

2.3 Konduktance a elektrický odpor

V reálných kvantových vodičích většinou dochází ke zpětnému rozptylu s nenulovou pravděpodobností $R_n(k_x)$, která snižuje konduktanci. Ze zákona zachování toku elektronů vyplývá, že součet pravděpodobností průchodu a odrazu musí být roven jedné, $T_n(k_x) + R_n(k_x) = 1$. Je-li počet vodivostních kanálů pod Fermiho mezí roven celému číslu i , musí součet transmisního a reflexního koeficientu nabývat právě této hodnoty

$$i = \mathcal{T} + \mathcal{R} \quad ; \quad \mathcal{R} \equiv \sum_n R_n(E_F) . \quad (23)$$

Celkový odpor vzorku daný převrácenou hodnotou konduktance můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$\frac{1}{G} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\mathcal{T}} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{i} + \frac{h}{e^2} \frac{\mathcal{R}}{i \mathcal{T}} . \quad (24)$$

První člen na pravé straně rovnice odpovídá odporu balistického vodiče a lze jej chápat jako vstupní či kontaktní odpor. Jinými slovy, reprezentuje odpor rozhraní mezi makroskopickými proudovými přívody a balistickým vodičem. Druhý člen představuje vnitřní odpor systému určený rozptylem elektronů na potenciálových fluktuacích uvnitř studovaného vzorku. Pokud bychom byli schopni k ideálním přívodům připojit potenciálové kontakty, poměr napěťového rozdílu mezi nimi a proudu by reprezentoval právě vnitřní odpor.

Pro dva vzorky v sérii lze očekávat, že v klasickém případě, kdy koherentní délka λ_ϕ je menší než délka vzorků, bude celkový vnitřní odpor dán součtem vnitřních odporů obou vzorků. Pokud však bude λ_ϕ větší než jejich celková délka, lze očekávat, že díky interferenci dojde ke zvýšení celkového vnitřního odporu.

Nejjednodušším systémem, na kterém lze výše uvedená tvrzení ilustrovat, je jednorozměrný vodič se dvěma rozptylovými centry. Budeme předpokládat, že jejich vzdálenost je d a každé z nich má jiné rozptylové charakteristiky. Ke stanovení konduktance je třeba určit

amplitudu $t_{1,2}$ transmitované vlny, která má tvar daný vztahem (8). Elektron přicházející zleva k prvnímu rozptylovému centru je reprezentován funkcí $\exp(ik_x x)$, kde $k_x x$ reprezentuje fázi dopadající vlny. Amplituda vlny prošlé prvním centrem bude mít amplitudu t_1 . Ta dorazí k druhému rozptylovému centru a ta část, která projde, bude mít amplitudu $t_1 t_2$. Odražená vlna, která má amplitudu $t_1 r_2$ se vrací k prvnímu rozptylovému centru zprava, kterým buď projde, nebo se odrazí a vrátí se k druhému rozptylovému centru s amplitudou $t_1 r_2 r'_1$. Apostrof u r'_1 zdůrazňuje, že se jedná o odraz vlny přicházející k rozptylovému centru zprava. Vlna prošlá i druhým centrem bude mít amplitudu $t_1 r_2 r'_1 t_2$. Na rozdíl od vlny, která prošla systémem na první pokus, urazila tato vlna navíc vzdálenost $2d$. Tím se změnila její fáze o $2k_x d$ a amplituda této prošlé vlny se tedy bude lišit o fázový faktor $\exp(2ik_x d)$. Odražená část vlny bude stejný proces opakovat. Pro amplitudu $t_{1,2}$ transmitované vlny dostaneme

$$t_{1,2} = t_1 t_2 \left[1 + r_2 r'_1 e^{2ik_x d} + (r_2 r'_1)^2 e^{4ik_x d} + \dots \right] = \frac{t_1 t_2}{1 - r_2 r'_1 e^{2ik_x d}}. \quad (25)$$

Amplitudy vlnových funkcí (t , r a r') jsou obecně komplexní čísla, která vždy můžeme psát ve tvaru $r \exp(i\theta)$, kde r označuje absolutní hodnotu amplitudy a její čtverec má význam pravděpodobnosti průchodu nebo odrazu. Označíme-li pravděpodobnosti průchodu jednotlivými rozptylovými centry jako $T_1 = |t_1|^2$ a $T_2 = |t_2|^2$ a dále pravděpodobnosti odrazu jako $R_1 = |r'_1|^2$ a $R_2 = |r_2|^2$, dostaneme pro pravděpodobnost, že se elektron dostane přes obě rozptylová centra, následující vztah

$$T_{1,2} = |t_{1,2}|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2k_x d + \theta) + R_1 R_2}, \quad (26)$$

kde θ je změna fáze daná komplexním charakterem amplitud. Pokud bychom ignorovali vlnový charakter elektronu, považovali jej za klasickou částici, která s pravděpodobností $T_1 = 1 - R_1$ a $T_2 = 1 - R_2$ prochází bariérami reprezentovanými rozptylovými centry, dostali bychom následující klasický výsledek

$$T_{1,2}^{(\text{klas})} = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2}. \quad (27)$$

Z porovnání obou výrazů vyplývá, že interference má nezanedbatelný vliv na pravděpodobnost průchodu, a tedy i na konduktanci.

Konduktance je silně závislá na fázi $\phi \equiv 2dk_x$. Pro odhad průměrného vlivu interference na měřený odpor je třeba provést středování přes tyto fáze. Uvažujme soubor vzorků které se liší pouze hodnotou fáze, která nabývá náhodných hodnot. Pro průměrnou hodnotu odporu $\langle 1/G \rangle$ takového souboru dostaneme

$$\left\langle \frac{1}{G} \right\rangle = \frac{h}{e^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{T_{1,2}} = \frac{h}{e^2} \frac{1 + R_1 R_2}{T_1 T_2} = \frac{h}{e^2} \left[1 + \frac{R_1}{T_1} + \frac{R_2}{T_2} + 2 \frac{R_1}{T_1} \frac{R_2}{T_2} \right]. \quad (28)$$

Proč se přes fáze nestředuje konduktance ale odpor, který je přímo úměrný napětí? Důvodem je, že sériově zapojenými vodiči prochází stejný proud, zatímco spád napětí na nich

závisí právě na fázi. Fyzikálně správné středování přes napěťové rozdíly odpovídá středování přes fáze.

Odvozený vztah má podobnou strukturu jako vztah (24). První člen na pravé straně rovnice reprezentuje odpor jednorozměrného balistického vodiče, tedy vstupní či kontaktní odpor, a zbylé členy definují vnitřní odpor vzorku daný jeho rozptylovými vlastnostmi. Poslední člen na pravé straně rovnice reprezentuje průměrný vliv interference. Pokud bychom použili pro pravděpodobnost průchodu klasický výraz, tento člen by jako jediný ve vztahu pro celkový odpor chyběl a vnitřní odpor by byl dán aditivními příspěvky obou vnitřních odporů, $R_1/T_1 + R_2/T_2$, jak je obvyklé u klasických systémů. Pro kvazi-jednorozměrné systémy s libovolným počtem vodivostních kanálů je odvození vztahu pro celkový odpor formálně mnohem komplikovanější, ale vede ke stejným obecným závěrům.

2.4 Jev lokalizace v kvazi-jednorozměrných vodičích

Vnitřní odpor definovaný v předcházející kapitole podílem reflexního a transmisního koeficientu má význam standardně definovaného odporu ρ . Díky vlnovému charakteru elektronů, který vyvolává interferenci rozptylovaných vln, není však aditivní veličinou. Je-li vzorek složen ze dvou částí o vnitřních odporech ρ_1 a ρ_2 , celkový vnitřní odpor ρ není dán prostým součtem $\rho_1 + \rho_2$. V analogii se vztahem (28) dostaneme pro čistě jednorozměrný systém následující vztah

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \frac{e^2}{h} 2\rho_1\rho_2 \quad ; \quad \rho_1 \equiv \frac{h}{e^2} \frac{R_1}{T_1} \quad ; \quad \rho_2 \equiv \frac{h}{e^2} \frac{R_2}{T_2} . \quad (29)$$

Uvedený vztah lze použít k odvození závislosti odporu vodiče na jeho délce. Pravděpodobnosti průchodu a odrazu, T_1 a R_1 , nechť charakterizují odpor $\rho(L)$ vodiče délky L a pravděpodobnosti T_2 a R_2 nechť charakterizují odpor $\rho(\Delta L)$ vodiče o délce ΔL . Pokud ΔL bude velmi malé, lze aplikovat pro odpor krátké sekce $\rho(\Delta L)$ lineární přiblížení v rozvoji dle ΔL a poměr R_2/T_2 aproximovat výrazem $\Delta L/L_0$. Materiálová konstanta L_0 definuje klasický měrný odpor vztahem $h/(e^2 L_0)$. Pro odpor v závislosti na L pak dostaneme následující diferenciální rovnici

$$\lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\rho(L + \Delta L) - \rho(L)}{\Delta L} = \frac{d\rho(L)}{dL} = \frac{\frac{h}{e^2} + 2\rho(L)}{L_0} \quad ; \quad \rho(\Delta L) \approx \frac{h}{e^2} \frac{\Delta L}{L_0} . \quad (30)$$

Její řešení má tvar

$$\rho(L) = \frac{1}{2} \frac{h}{e^2} \left[e^{2L/L_{\text{lok}}} - 1 \right] , \quad (31)$$

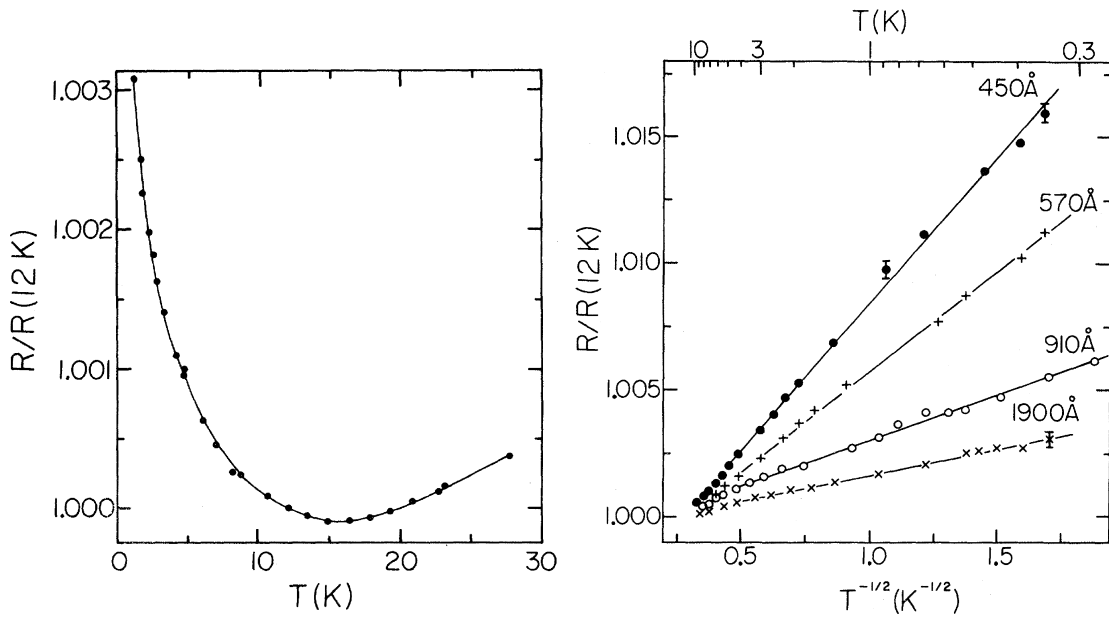
kde L_{lok} je tzv. lokalizační délka, která je pro jednorozměrný systém právě rovna L_0 .

Pro kvazi-jednorozměrný vodič je situace komplikovanější. Bylo ukázáno, že i v takovém případě roste odpor exponenciálně, pokud vodič je dostatečně dlouhý, aby jeho konduktance byla menší než e^2/h . Vzhledem k tomu, že vodivostní kanály jsou v podstatě paralelní vodiče, lze předpokládat, že odpor krátké sekce bude nepřímo úměrný počtu vodivostních kanálů i , tedy že $\rho(\Delta L) \sim \Delta L/(i L_0)$. Závislost odporu na délce má pak stejný

tvár jako v jednorozměrném případě s tím, že lokalizační délka je i -násobkem lokalizační délky jednoho vodivostního kanálu, $L_{\text{lok}} \sim i L_0$.

Závěrem lze konstatovat, že díky interferenci odpor exponenciálně roste s délkou vodiče. Dochází k lokalizaci elektronů a systém přestává být vodivý. Předpokladem však je, že nedochází k neelastickému rozptylu a uvažovaný systém je zcela koherentní, $\lambda_\phi \sim L$. To je však podmínka prakticky nerealizovatelná. Na vodiče při dané teplotě je třeba nahlížet jako na systémy tvořené řadou nekoherentně svázaných segmentů, přičemž procesy v každém z nich je možno považovat za plně koherentní. Délku segmentů lze tedy ztotožnit s koherentní délkou λ_ϕ . Měřené hodnoty odporů pak odpovídají součtu odporů jednotlivých segmentů. Ty mají různé rozptylové charakteristiky závislé na fázi vlnových funkcí. Naměřený vliv interference je tak zprůměrovaný přes fázové faktory jednotlivých segmentů. Pro průměrný odpor segmentu lze pak použít vztah (31), ve kterém je L nahrazeno λ_ϕ .

První experimentální potvrzení jevu lokalizace vyvolané interferencí v kvazi-jednorozměrných vodičích bylo pozorováno na tenkých kovových drátech $\text{Au}_{60}\text{Pd}_{40}$ o průměrech řádu několika stovek \AA ($10 \text{\AA} = 1 \text{ nm}$) [9], viz Obr. 6. Odpor makroskopických kovových vzorků obecně klesá s teplotou a díky poklesu četnosti fononů je úměrný T^5 . Při dostatečně nízké teplotě dosáhne tzv. zbytkového odporu, který je teplotně nezávislý. Na tenkých drátech $\text{Au}_{60}\text{Pd}_{40}$ byl však v této oblasti, pod teplotou cca 15 K, pozorován nárůst odporu. I když byl velmi malý, řádu několika promile celkového odporu, jedná se evidentně o jev lokalizace.



Obrázek 6: Závislosti odporu drátů $\text{Au}_{60}\text{Pd}_{40}$ různých průměrů na teplotě (na levém obrázku je závislost pro drát o průměru cca 890 \AA).

V uvedeném případě se jedná o slabou lokalizaci splňující podmínku, že koherentní délka je mnohem menší než lokalizační délka, $\lambda_\phi/L_{\text{lok}} \ll 1$. Vztah (31) lze aplikovat pouze

na plně koherentní segmenty, tedy na části vzorku mající délku λ_ϕ . Rozvojem exponenciální závislosti v mocninou řadu poměru $\lambda_\phi/L_{\text{lok}}$ a zachováním pouze členů rozvoje do druhého řádu včetně, lze odpor vodiče délky L aproximovat následujícím výrazem

$$\rho(L) = \frac{h}{e^2} \frac{L}{L_{\text{lok}}} \left[1 + \frac{L}{L_{\text{lok}}} + \dots \right] \approx \rho_0(L) \left[1 + \frac{\lambda_\phi}{L_{\text{lok}}} \right] \quad ; \quad \rho_0(L) \equiv \frac{h}{e^2} \frac{L}{L_{\text{lok}}}, \quad (32)$$

ve kterém $\rho_0(L)$ označuje klasický zbytkový odpor daný elastickými srážkami, který je úměrný délce vodiče. Odpovídající difúzní koeficient je možno v takovém případě považovat za teplotně nezávislý. Pro silně neuspořádané kovové systémy lze pro teplotní závislost koherentní délky λ_ϕ použít vztah (3). Kvantová korekce k odporu je pak úměrná $1/\sqrt{T}$, což je v kvalitativním souhlasu s měřeními závislostmi (viz Obr. 6).

Pro diskutovaný případ slabé lokalizace, kdy kvantová korekce k elektrickému odporu je malá, dostaneme použitím vztahu (32) následující výraz pro střední hodnotu kvantové korekce ke konduktanci koherentního segmentu

$$\langle \Delta G(L \approx \lambda_\phi) \rangle \equiv \frac{1}{\rho(\lambda_\phi)} - \frac{1}{\rho_0(\lambda_\phi)} \approx -\frac{e^2}{h}. \quad (33)$$

Poznamenejme, že tento výraz platí i pro kvazi-jednorozměrné vodiče a lze jej aplikovat i na dvojrozměrné systémy konečné šířky. Podstatným rysem režimu slabé lokalizace je univerzálnost kvantových korekcí ke konduktanci. Jsou nezávislé na materiálu vodiče, což bylo experimentálně ověřeno.

2.5 Lokalizace v kvazi-dvojrozměrných vodičích a vliv slabého magnetického pole

Při interferenčních jevech hraje podstatnou roli fáze vlnové funkce, kterou lze ovlivňovat magnetickým polem B . To vstupuje do Hamiltoniánu prostřednictvím vektorového potenciálu \vec{A} a pro elektron s hmotností m_0 v prostředí charakterizovaném potenciálem $V(\vec{r})$ dostaneme

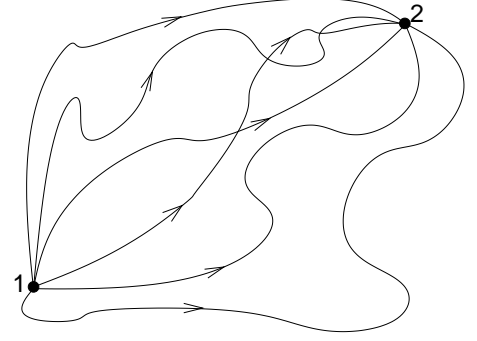
$$H = \frac{1}{2m_0} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + V(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(-i\vec{\nabla} + \frac{e}{\hbar}\vec{A} \right)^2 + V(\vec{r}) \quad ; \quad \vec{B} \equiv \text{rot}\vec{A}. \quad (34)$$

V klasické fyzice nemá magnetické pole vliv na energii částic. Lze tedy předpokládat, že v limitě velmi slabých polí, kdy je vektorový potenciál \vec{A} pomalu se měnící funkcí \vec{r} , by měl být jeho vliv na energii zanedbatelný i při kvantovém popisu. Uvědomíme-li si, že vlastní stavy pro nulové magnetické pole lze vždy vyjádřit jako lineární kombinaci rovinných vln $\exp(i\vec{k}\vec{r})$, můžeme aproximovat vlastní funkce v nenulovém poli stejným rozvojem, s tím, že budeme rovinné vlny modifikovat dodatečným fázovým faktorem

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} \rightarrow e^{i(\vec{k} - 2\pi\frac{e}{\hbar}\vec{A})\vec{r}}. \quad (35)$$

Snadno se lze přesvědčit, že jsou vlastními funkcemi Hamiltoniánu, pokud zanedbáme členy odpovídající gradientu vektorového potenciálu. Vlnový vektor \vec{k} definuje energii elektronů, která není v tomto přiblížení ovlivněna přítomností magnetického pole. Prostřednictvím vektorového potenciálu ovlivňuje pole pouze fázi vlnové funkce.

Vliv fluktuací potenciálu lze popsat v analogii s chováním elektronu jako klasické částice. Ta se pohybuje po drahách, které jsou deformovány vlivem rozptylu se srážkovými centry reprezentujícími potenciálové nehomogenity. Při kvantově-mechanickém popisu je elektron reprezentován vlnou sledující v prostoru různé dráhy, podobně jako klasická částice. Podstatným rozdílem je existence fáze vlny, $(\vec{k} - e\vec{A}/\hbar) \cdot \vec{r}$, kde \vec{r} i \vec{k} mají směr rovnoběžný s tečnou v daném bodě dráhy. Fáze vlny, která je zodpovědná za vznik interferenčních jevů, se podél dráhy postupně mění.



Obrázek 7: Elektronové dráhy C_α .

Uvažujme dvojrozměrný elektronový systém vložený do slabého magnetického pole orientovaného kolmo na systém. Elektron se z bodu daného polohovým vektorem \vec{r}_1 může dostat do bodu \vec{r}_2 po různých drahách C_α , viz Obr. 7. Amplituda vlnové funkce v bodě \vec{r}_2 je, v analogii s rozptylovým problémem, transmisní amplitudou $t_{1 \rightarrow 2}$, která je dána součtem amplitud reprezentujících různé dráhy α

$$t_{1 \rightarrow 2} = \sum_{\alpha} t_{\alpha} e^{i\Delta\phi_{\alpha}} \quad ; \quad \Delta\phi_{\alpha} = \int_{C_{\alpha}} \left(\vec{k} - 2\pi \frac{e}{h} \vec{A} \right) d\vec{l}, \quad (36)$$

kde $\Delta\phi_{\alpha}$ je dána dráhovým integrálem a reprezentuje změnu fáze vlnové funkce danou pohybem elektronu po dráze C_{α} . Pravděpodobnost výskytu elektronu v bodě \vec{r}_2 je dána čtvercem absolutní hodnoty amplitudy

$$|t_{1 \rightarrow 2}|^2 = \sum_{\alpha} |t_{\alpha}|^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} \left(t_{\alpha} t_{\beta}^* e^{i(\Delta\phi_{\alpha} - \Delta\phi_{\beta})} + t_{\alpha}^* t_{\beta} e^{-i(\Delta\phi_{\alpha} - \Delta\phi_{\beta})} \right). \quad (37)$$

První člen odpovídá klasickému výsledku, že pravděpodobnost výskytu v daném bodě je dána součtem pravděpodobností, že se elektron dostane do bodu \vec{r}_2 po drahách C_{α} . Druhý člen je silně oscilující funkcí rozdílu fází a v případě náhodného pohybu elektronu se jeho hodnota blíží nule, protože rozdíly fází nabývají náhodných hodnot. V tomto případě vlnový charakter elektronu nemá vliv na pravděpodobnost dosažení bodu \vec{r}_2 .

Vliv vlnového charakteru elektronu se však projeví v případě, že počáteční a koncový bod jsou shodné, $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. Dráhy pak mají tvar uzavřených smyček O_{α} , po kterých se může elektron pohybovat ve směru či proti směru hodinových ručiček, což budeme značit indexem (\pm) . Zanedbáme-li silně oscilující člen dostaneme

$$|t_{1 \rightarrow 1}|^2 = \sum_{\alpha} \left(|t_{\alpha}^{(+)}|^2 + |t_{\alpha}^{(-)}|^2 \right) + \sum_{\alpha} |t_{\alpha}^{(+)}| |t_{\alpha}^{(-)}| \left(e^{i(\Delta\phi_{\alpha}^{(+)} - \Delta\phi_{\alpha}^{(-)})} + e^{-i(\Delta\phi_{\alpha}^{(+)} - \Delta\phi_{\alpha}^{(-)})} \right), \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\alpha}^{(+)} - \Delta\phi_{\alpha}^{(-)} &= \oint_{O_{\alpha}^{(+)}} \left(\vec{k} - 2\pi \frac{e}{h} \vec{A} \right) d\vec{l} - \oint_{O_{\alpha}^{(-)}} \left(\vec{k} - 2\pi \frac{e}{h} \vec{A} \right) d\vec{l} = \\ &= 4\pi \frac{e}{h} \oint_{O_{\alpha}^{(+)}} \vec{A} d\vec{l} = 4\pi \frac{e}{h} \int_{O_{\alpha}^{(+)}} \text{rot} \vec{A} d\vec{s} = 4\pi \frac{e}{h} B S_{\alpha} \equiv 4\pi \frac{\Phi_{\alpha}}{\Phi_0}, \end{aligned} \quad (39)$$

kde S_α je plocha vymezená smyčkou O_α , $\Phi_\alpha = S_\alpha \cdot B$ je magnetický tok smyčkou a $\Phi_0 = h/e$ je kvantum magnetického toku. Poznamenejme, že při změně směru integrace podél dané dráhy se změní i znaménko vlnového vektoru \vec{k} a odpovídající příspěvek k fázovému rozdílu $\Delta\phi_\alpha^{(+)} - \Delta\phi_\alpha^{(-)}$ je tak nulový. Hledaný výraz pro pravděpodobnost, že se elektron vrátí na místo, kde se již vyskytoval je

$$|t_{1 \rightarrow 1}|^2 = \sum_\alpha (|t_\alpha^{(+)}|^2 + |t_\alpha^{(-)}|^2) + 2 \sum_\alpha |t_\alpha^{(+)}| |t_\alpha^{(-)}| \cos\left(4\pi \frac{\Phi_\alpha}{\Phi_0}\right). \quad (40)$$

Protože je vliv magnetického pole na amplitudy t_α v uvažovaném přiblížení zanedbán, jsou amplitudy invariantní vůči časové inverzi a platí

$$t_\alpha^{(+)}(t_\alpha^{(-)})^* = (t_\alpha^{(-)})^* t_\alpha^{(+)} = |t_\alpha^{(+)}| |t_\alpha^{(-)}| = |t_\alpha^{(+)}|^2 = |t_\alpha^{(-)}|^2. \quad (41)$$

Pravděpodobnost návratu elektronu do stejného bodu, a tedy vytvoření smyčky (vlastně lokalizovaného stavu), je díky interferenci dvakrát větší než pravděpodobnost odpovídající klasickému popisu. To je důvod, proč je hodnota klasické konduktance větší, než hodnota kvantové konduktance, která bere v úvahu interferenci, tedy vliv fází. Jak je dále z výrazu vidět, nenulové magnetické pole snižuje pravděpodobnost návratu a potlačuje tak elektronovou lokalizaci. Je třeba připomenout, že se jedná o případ slabých magnetických polí, která nejen že neovlivňují energii elektronu, ale nemění ani jeho dráhu. O elektronových drahách se předpokládá, že jsou dány pouze rozptylem na fluktuacích potenciálu a transmisní amplitudy t_α nejsou ovlivněny přítomností magnetického pole. Pojem slabé magnetické pole je však relativní. Uvedené předpoklady mohou být splněny i pro pole obvykle považovaná za silná, pokud jsou studované systémy silně neuspořádané, t.j. mají dostatečně velký zbytkový odpor.

Podobně jako v případě kvazi-jednorozměrných vodičů, je na reálné plošné vodiče třeba nahlížet jako na systémy tvořené souborem nekoherentně svázaných, plně koherentních oblastí o rozměrech řádu koherentní délky λ_ϕ . Pro izotropní systémy lze předpokládat, že tyto oblasti mají tvar disku. Pro odhad kvantové korekce ke konduktanci uvažujme koherentní oblast ve tvaru mezikruží o vnitřním poloměru R_{\min} a vnějším poloměru R_{\max} , tzv. Corbino disk. Konduktance takového vzorku je dána poměrem celkového proudu J procházejícího mezikružím a vloženým napětím U_0 . Označíme-li vodivost vzorku jako σ , platí pro elektrostatický potenciál $\phi(\vec{r})$, jehož gradient reprezentuje sílu působící na jednotkový kladný náboj, následující rovnice

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \quad ; \quad \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \quad ; \quad \text{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \phi(\vec{r}) = 0, \quad (42)$$

kde $\vec{j}(\vec{r})$ a $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ označují proudovou hustotu a elektrické pole. Řešením jsou následující vztahy

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{U_0 \ln(r/R_{\min})}{\ln(R_{\max}/R_{\min})} \quad ; \quad \vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{\sigma U_0}{\ln(R_{\max}/R_{\min})}. \quad (43)$$

Pro konduktanci dostaneme

$$G \equiv \frac{J}{U_0} = \frac{1}{U_0} \oint \vec{j}(\vec{r}) d\vec{s} = \frac{2\pi\sigma}{\ln(R_{\max}/R_{\min})}. \quad (44)$$

Protože kvantové korekce mohou vzniknout pouze v oblasti, kde dochází k interferenci, je přirozené ztotožnit R_{\max} se střední koherentní délkou λ_ϕ . Poloměr R_{\min} vymezuje oblast, která je tak malá, že pro ni nelze definovat konečnou vodivost σ . Takovou oblastí je prostor, ve kterém se v podstatě nevyskytují rozptylová centra. Poloměr R_{\min} lze tak ztotožnit se střední volnou dráhou elektronu danou elastickým rozptylem, λ_e .

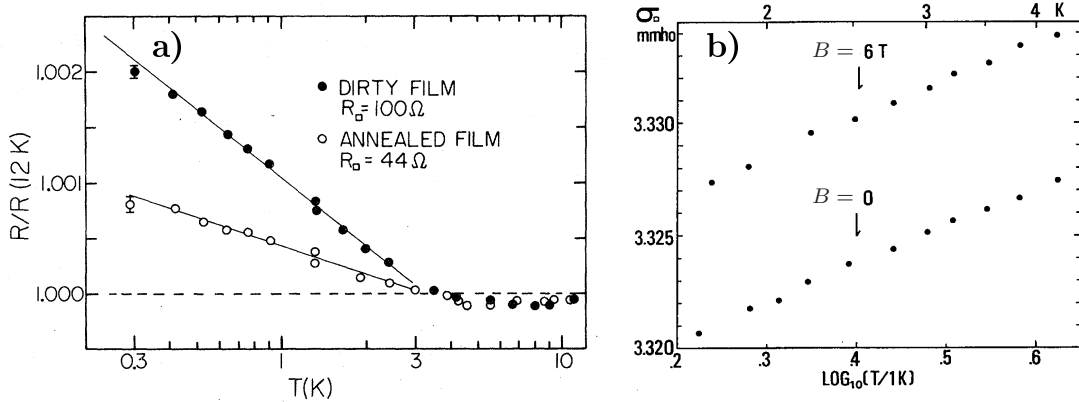
Pro případ slabé lokalizace, tedy v limitě $L_{\text{lok}} \gg \lambda_\phi$, mají kvantové korekce ke konduktanci univerzální charakter daný vztahem (33). Pro kvazi-dvojměrný vodič dostaneme

$$\langle \Delta G \rangle = \frac{2\pi\sigma}{\ln(\lambda_\phi/\lambda_e)} - \frac{2\pi\sigma_0}{\ln(\lambda_\phi/\lambda_e)} \approx -\frac{e^2}{h}, \quad (45)$$

kde σ_0 označuje klasickou vodivost. Pro hodnoty vodivosti σ a měrného odporu ρ , které zahrnují vliv interference dostaneme

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{e^2}{2\pi h} \ln(\lambda_\phi/\lambda_e) \quad ; \quad \rho \equiv \frac{1}{\sigma} \cong \rho_0 + \rho_0^2 \frac{e^2}{2\pi h} \ln(\lambda_\phi/\lambda_e), \quad (46)$$

kde $\rho_0 = 1/\sigma_0$ reprezentuje měrný odpor v klasické limitě.



Obrázek 8: a) Teplotní závislost odporu vrstviček $\text{Au}_{60}\text{Pd}_{40}$ s různým stupněm neuspořádanosti. b) Závislost vodivosti vrstviček Cu na teplotě v nulovém magnetickém poli a v poli 6 T.

Jev lokalizace, růst odporu s klesající teplotou, byl pozorován na tenkých vodivých vrstvách připravených z nejrůznějších materiálů, ať kovových, či polovodičových. Podmínky, za kterých byly odvozeny výše uvedené vztahy pro slabou lokalizaci, však nejlépe splňují silně neuspořádané systémy, jako jsou například napařené či naprašované kovové vrstvičky nebo tak zvané polovodičové δ -vrstvy. Takové systémy jsou dostatečně neuspořádané, aby pohyb elektronů v nich mohl být považován za difúzní, a teplota ani magnetické pole nemají vliv na elektronovou koncentraci. Pak lze předpokládat, že je závislost koherentní délky na teplotě daná vztahem (3), $\lambda_\phi \sim 1/\sqrt{T}$. Kvantové korekce dle vztahu (46), jak k odporu tak i k vodivosti, by tedy měly mít logaritmickou teplotní závislost. Tento závěr byl experimentálně poprvé ověřen na tenkých vrstvách $\text{Au}_{60}\text{Pd}_{40}$ [9], viz Obr. 8a.

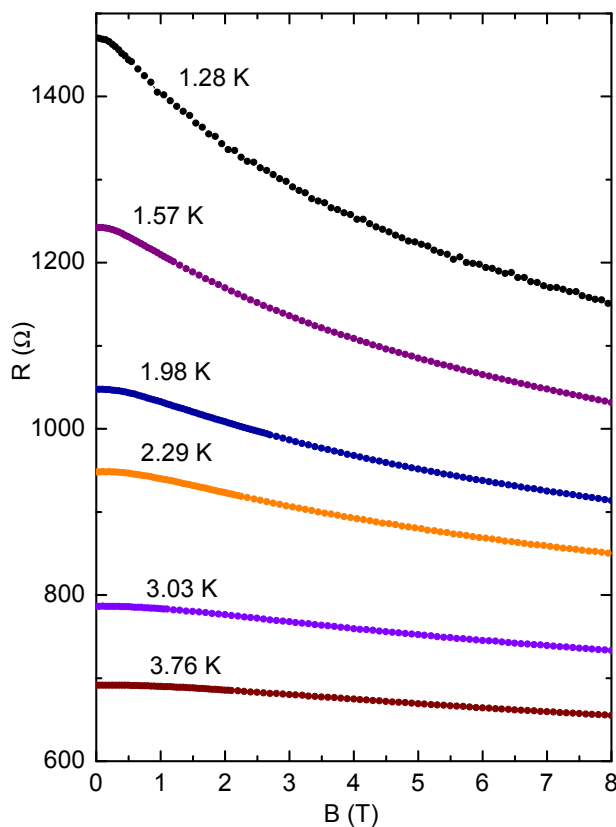
Potlačování lokalizace magnetickým polem potvrzují například měření na Cu vrstvičkách, jak je vidět ze závislosti vodivosti na Obr. 8b, převzatých z práce [10]. Přestože použité magnetické pole 6 T je relativně vysoké, díky velké neuspořádanosti vrstviček neovlivňuje energii elektronů, a z tohoto hlediska je lze považovat za slabé. Uvedené závislosti se omezují na poměrně úzký teplotní interval. Na vrstvičkách indiových oxidů [11] však byla logaritmická teplotní závislost pozorována v širokém teplotním intervalu, 1 až 100 K.

Velmi silná lokalizace, i její potlačování magnetickým polem, byla pozorována na tenkých vrstvách ($\sim 0,8 \mu\text{m}$) dusíkem dopovaného polykrystalického diamantu [12], viz Obr. 9. Vrstvy byly připraveny chemickou depozicí a velikost krystalků byla rozměrů cca 16 nm. V tomto případě však teplotní závislosti odporu nemají jednoduchou logaritmickou závislost, která je obvykle pozorována na velmi neuspořádaných kovových systémech.

Fyzikální podstatou jevu lokalizace je skutečnost, že díky interferenci je pravděpodobnost vytváření lokalizovaných stavů vyšší, než při klasickém popisu. Její projevy však slábnou, pokud vytváření uzavřených smyček pohybujícím se elektronem, je ze statistického hlediska málo pravděpodobné. Je to případ trojrozměrných systémů, ve kterých je vliv interference na elektronový transport zanedbatelný. Výjimkou jsou samozřejmě systémy, ve kterých jsou v jednom směru vazby mezi elektrony v krystalografických rovinách velmi slabé. Takový systém se pak spíše chová jako soubor slabě vázaných dvojrozměrných systémů.

2.6 Aharonovův — Bohmův jev

V předcházející kapitole bylo ukázáno, že interference se projevuje, mají-li elektronové dráhy tvar uzavřených smyček. Toho je možno docílit i tvarem vodiče znázorněném na Obr. 10a. Nechť smyčka vymežující plochu S i přívody ke kontaktům jsou připravené z jednorozměrných vodičů a leží v rovině kolmé k magnetickému poli \vec{B} . Elektron vstupující do smyčky zleva bude pokračovat horním vodičem po dráze $C^{(+)}$ nebo spodním vodičem po dráze $C^{(-)}$. Pro jednoduchost předpokládejme, že pak přímo projde spojením s výstupním vodičem až do elektrického přívodu 2. Amplituda vlny odcházející ze smyčky je dána



Obrázek 9: Závislost odporu filmu nanokrystalického diamantu na magnetickém poli B pro různé teploty.

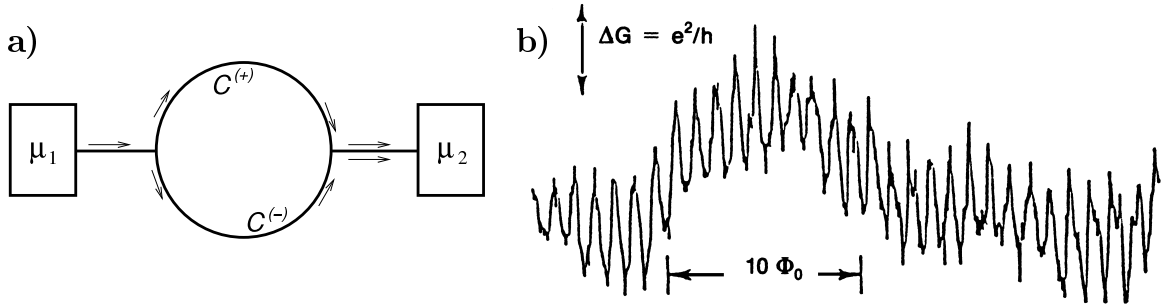
součtem transmisních amplitud, které závisují na cestě

$$t_{1 \rightarrow 2} = t_0^{(+)} e^{-i \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{C^{(+)}} \vec{A} d\vec{l}} + t_0^{(-)} e^{-i \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{C^{(-)}} \vec{A} d\vec{l}}, \quad (47)$$

kde $t_0^{(\pm)}$ jsou transmisní amplitudy pro případ nulového magnetického pole. Protože integrace podél dráhy $C^{(+)}$ má opačný směr než integrace podél dráhy $C^{(-)}$, dostaneme pro konduktanci následující vztah

$$G \equiv \frac{e^2}{h} |t_{1 \rightarrow 2}|^2 = \frac{e^2}{h} \left[|t_0^{(+)}|^2 + |t_0^{(-)}|^2 + 2|t_0^{(+)}| |t_0^{(-)}| \cos \left(\theta + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right], \quad (48)$$

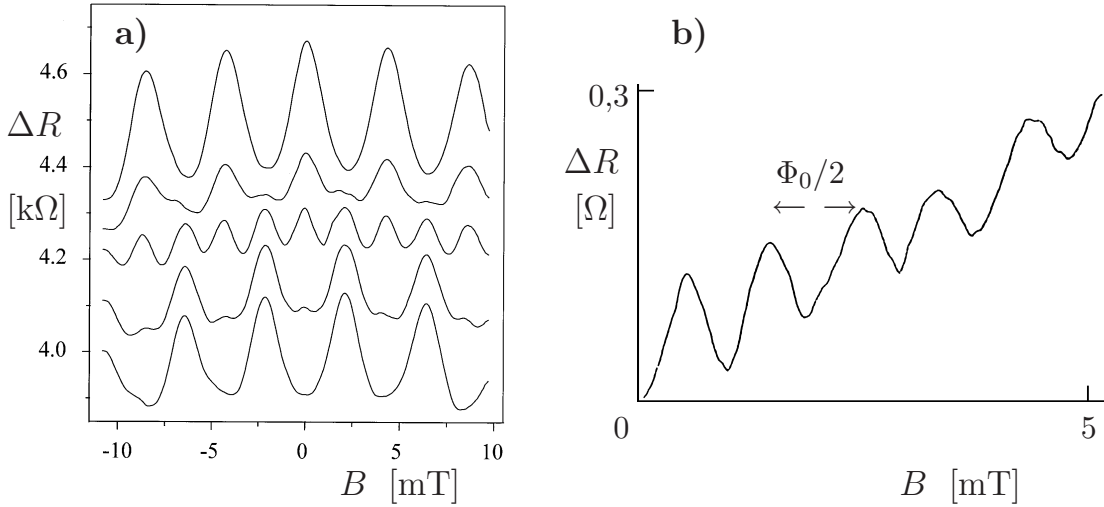
kde θ reprezentuje rozdíl fází v případě nulového magnetického pole a $\Phi = BS$ je magnetický tok smyčkou. Konduktance tedy osciluje v závislosti na magnetickém poli mezi nulou a kvantovou hodnotou e^2/h . Perioda oscilací je dána kvantem magnetického toku $\Phi_0 = h/e$. Stejná perioda oscilací je samozřejmě pozorovatelná i při měření odporu. Je-li vodič kvazi-jednorozměrný je celková konduktance dána součtem konduktancí všech vodivostních kanálů. Pokud je plocha smyčky mnohem větší než průměr vodiče, je rozdíl fází pro jednotlivé kanály zanedbatelný a oscilace konduktance zůstanou zachovány. Ukázka experimentálního pozorování tohoto, tzv. Aharonova-Bohmova jevu, je na Obr. 10b. Jedná se o výsledky měření na systému připraveném z tenkých zlatých vodičů, převzaté z práce [13].



Obrázek 10: a) Schéma vodiče se smyčkou. b) Periodická závislost konduktance na magnetickém toku smyčkou pro Au-vodič průřezu 70×20 nm, $T=50$ mK.

Fyzikální podstatou Aharonova-Bohmova jevu je kvantování stavů uzavřenu smyčkou, které je důsledkem vlnového charakteru elektronu. Ty musí splňovat podmínku, že změna fáze vlnové funkce podél smyčky musí být celočíselným násobkem 2π . Každý elektronový stav tvoří proudovou smyčku, která vymezuje plochu s celočíselným počtem magnetických kvant $\Phi_0 = h/e$. Fyzikální podstata je tedy stejná jako v případě kvantování toku supravodivou smyčkou [8], s tím rozdílem, že supravodivý stav reprezentuje kolektivní chování Cooperových párů majících jedinou fázi. Vzhledem k tomu, že páry nesou náboj $2e$, jednotka pro kvantování magnetického toku je poloviční, $\Phi_0/2 = h/2e$.

Elektrické přívody spojující vodivou smyčku s elektrickými kontakty, rezervoáry elektronů, fixují Fermiho energii. Se změnou magnetického toku smyčkou se mění energie stavů ve smyčce způsobená jejich kvantováním, a počet stavů na Fermiho mezi daný počtem vodivostních kanálů se mění. Energetickým změnám stavů ve smyčkách s velkým počtem vodivostních kanálů, jako jsou smyčky kovových vodičů, odpovídají fluktuace počtu kanálů. Snaha systému minimalizovat svoji energii vede k tomu, že amplituda těchto fluktuací odpovídá přibližně změně počtu vodivostních kanálů o jeden. Výsledné změny konduktance $\Delta G = e^2/h$ pak zhruba odpovídají amplitudě Aharonových-Bohmových oscilací, jak je vidět na Obr. 10b.



Obrázek 11: a) Aharonovy-Bohmovy oscilace pro různé síly rozptylového centra v jednom rameni smyčky za teploty 0,1 K. b) Oscilace odporu hořčíkové trubičky na magnetickém poli s periodou $\Phi_0/2 = h/2e$ za teploty 1 K.

Perioda oscilací h/e je základní pozorovanou periodou. Ta vyplynula ze zjednodušeného modelu, ve kterém jsme předpokládali, že elektron se pohybuje pouze po dvou nejpřímějších drahách mezi elektrickými kontakty. Pokud vezmeme v úvahu, že v bodech větvení elektron se stejnou pravděpodobností vstoupí do kterékoliv z výstupních větví, a že v obou ramenech smyčky, horní i dolní, existují rozptylová centra, elektron má na výběr mnoho drah různých délek. Pro jednorozměrný vodič je pak konduktance dána následujícím vzorcem [14]

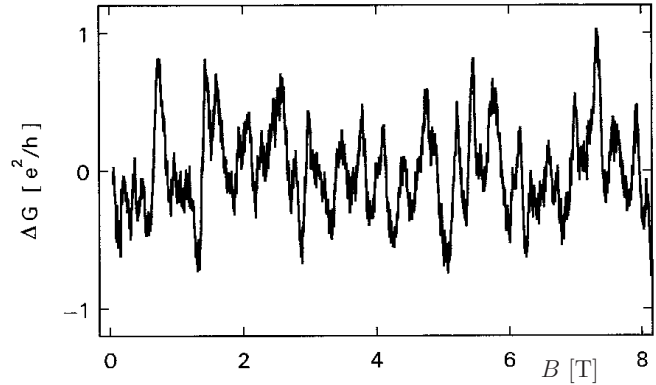
$$G = \frac{2e^2}{h} \frac{A_1 + A_2 \cos(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}) + A_3 \sin(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0})}{A_4 + A_5 \cos(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}) + A_6 \cos(4\pi \frac{\Phi}{\Phi_0})}, \quad (49)$$

kde koeficienty A_i ($i=1, \dots, 6$) jsou dány transmisními a reflexními amplitudami reprezentujícími rozptylová centra ve smyčce. Ve výrazu se kromě členů se základní periodou Φ_0 objevil i člen s periodou poloviční, $A_6 \cos(4\pi \Phi/\Phi_0)$, který je důsledkem započtení mnohonásobných odrazů.

Instruktivní je experiment na smyčce o průměru cca $1 \mu\text{m}$, připravené pomocí kovových hradel z elektronového plynu v heterostruktuře AlGaAs/GaAs [15]. V jednom rameni bylo vytvořeno umělé rozptylové centrum reprezentované potenciálem bodového hradla. Jeho síla tak mohla být měněna vnějším napětím. S postupnou změnou síly rozptylu přecházely oscilace se základní periodou v oscilace s poloviční periodou, které pak opět přecházely v oscilace s periodou základní, jak je vidět z Obr. 11a.

Aharonovy-Bohmovy oscilace byly poprvé pozorovány na tenké trubičce z hořčíku napařeném na křemenném vlákne o průměru cca $1,5 \mu\text{m}$ v magnetickém poli orientovaném rovnoběžně s osou trubičky [16], viz Obr. 11b. V tomto případě jsou oscilace se základní periodou potlačeny a pozorovaná perioda je poloviční, $\Phi_0/2$. Příčinou je geometrie vzorku a silně neuspořádaná kovová vrstvička s množstvím poruch reprezentujících rozptylová centra. Díky geometrii vzorku nejsou plochy vymezené elektronovými smyčkami vždy orientovány kolmo k magnetickému poli. Uzavírají plochy různých velikostí i když jejich průmět do roviny kolmé ke směru magnetického pole je stejný. Ukazuje se, že tato skutečnost vede k posílení vlivu oscilací s poloviční amplitudou $\Phi_0/2$, podobně jako v případě potlačování jevu lokalizace magnetickým polem, viz vztah (40).

Ke kvantování elektronových stavů na uzavřených drahách dochází i v plošných, kvazi-dvojměrných, systémech. Tam se elektronové smyčky vytvářejí díky rozptylu, uzavírají plochy různých velikostí a jsou zodpovědné za popsání jevu lokalizace. Velikosti ploch uzavřených elektronovými smyčkami jsou dány konkrétní geometrií rozptylového potenciálu. Důsledkem je, že se v závislosti na vloženém magnetickém poli objeví aperioidické oscilace konduktance. Jsou to tak zvané univerzální fluktuace konduktance, jejichž amplituda nezávisí na materiálu vodiče a je řádu e^2/h [13], viz Obr. 12.



Obrázek 12: Univerzální fluktuace konduktance pro kvazi-dvojměrný Au-vodič v závislosti na magnetickém poli B , naměřené při teplotě $T=50 \text{ mK}$.

3 Kvantové Hallovy jevy

3.1 Kvantový Hallův jev — celočíselný

Hallův jev se standardně měří na vzorcích ve tvaru dlouhého tenkého pásku. V případě, že je na vzorek aplikováno magnetické pole \vec{B} orientované kolmo na rovinu pásku, působí na pohybující se elektron Lorentzova síla ve směru kolmém jak na magnetické pole, tak i na směr pohybu elektronu. V případě, že páskem teče elektrický proud, rovnoběžný s osou pásku, musí být Lorentzova síla působící ve směru kolmém, kompenzována jinou silou, elektrickou, aby celková síla působící na nositele náboje byla nulová. Tato podmínka existence stacionárního stavu má, pro pásek šířky w v rovině $x - y$, magnetické pole ve směru osy \hat{z} a proud J podél osy pásku ve směru \hat{x} , následující tvar

$$(\vec{j} \times \vec{B})_y - e n_e \mathcal{E}_y = 0, \quad (50)$$

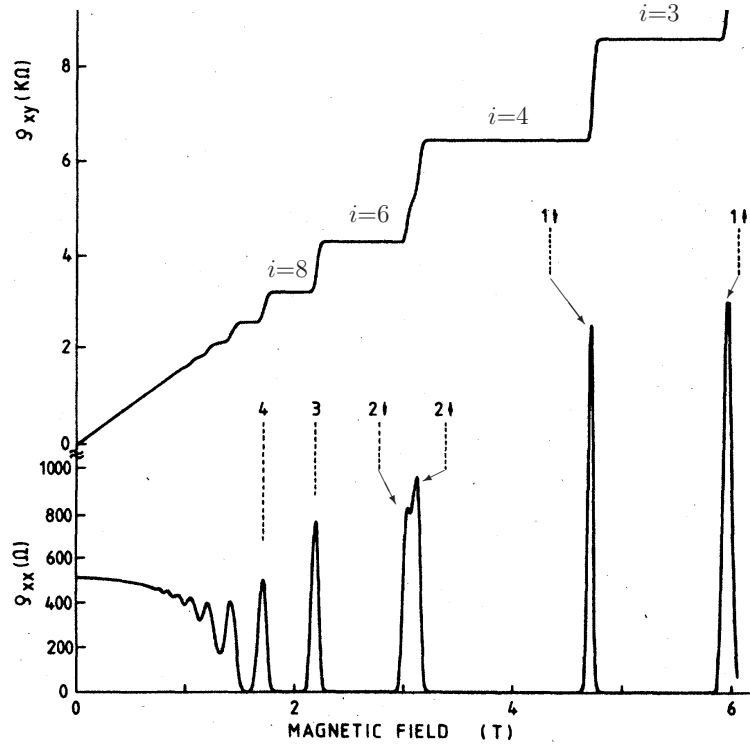
kde $\vec{j} \equiv (j_x, 0, 0)$ označuje proud připadající na jednotku šířky, $j_x \equiv J/w$, \mathcal{E}_y je elektrické pole napříč páskem a n_e je plošná koncentrace elektronů definovaná jako počet elektronů připadající na jednotkovou plochu pásku. Pro Hallův odpor, definovaný jako poměr napětí mezi hranami pásku $U_H \equiv w\mathcal{E}_y$ a celkového proudu J , dostaneme

$$R_H \equiv \frac{U_H}{J} = \frac{\mathcal{E}_y}{j_x} = -\frac{B}{en_e}. \quad (51)$$

Hallův odpor je úměrný magnetickému poli a nepřímo úměrný plošné elektronové koncentraci. Vzhledem k tomu, že nezávisí na disipaci energie, která určuje pouze spád napětí podél směru proudu, stalo se měření Hallova jevu užitečnou metodou pro určování koncentrace nositelů náboje v polovodičových systémech.

V roce 1980 došlo k překvapivému objevu, za který byla K. von Klitzingovi udělena v roce 1985 Nobelova cena. Na vzorku s dvojrozměrným elektronovým plynem připraveným na bázi Si-MOS FET vykázal Hallův odpor v závislosti na magnetickém poli stupňovitou závislost, místo očekávané závislosti lineární. Později byl stejný jev, ale s daleko výraznějšími stupni, naměřen na dvojrozměrných elektronových systémech v heterostrukturách AlGaAs/GaAs [17], viz Obr. 13. V oblastech prodlev nabývá Hallův odpor kvantových hodnot $h/(e^2i)$, kde i je celé číslo. Současně vymizí i podélný odpor, nebyl pozorován spád napětí ve směru proudu. Ten nabývá nenulových hodnot pouze v oblastech, kde Hallův odpor v závislosti na magnetickém poli má nenulovou směrnicí. Ve slabých polích, kde Hallův odpor vykazuje standardní lineární závislost, lze pozorovat pokles odporu s rostoucím magnetickým polem, tzv. negativní magnetorezistenci. Je to projev potlačování lokalizace elektronových stavů magnetickým polem popsany v předcházející kapitole.

Vztah pro Hallův odpor (51) zůstává v platnosti i pro případ, že vodivý pásek je dvojrozměrným elektronovým systémem, pokud magnetické pole je dostatečně slabé, aby neovlivňovalo energii elektronů. V případě silných magnetických polí však dochází ke kvantování energetického spektra. Pro nekonečně dlouhý pásek homogenního dvojrozměrného



Obrázek 13: Celočíselný kvantový Hallův jev. Závislost podélného odporu ρ_{xx} a Hallova odporu ρ_{xy} na magnetickém poli naměřená na heterostruktuře AlGaAs/GaAs s elektronovou pohyblivostí $52\,000\text{ cm}^2\text{ V}^{-1}\text{ s}^{-1}$ při teplotě 66 mK. Maxima v podélném odporu jsou označena čísly, která odpovídají kvantovým číslům Landauových hladin, n . Šipky označují orientaci spinu elektronů.

plynu má jedno-elektronový Hamiltonián následující tvar

$$H = \frac{1}{2m^*} [\vec{p} + e\vec{A}(\vec{r})]^2 + V_0(y) + g\mu_B B s_z, \quad \vec{A} = (-By, 0, 0). \quad (52)$$

Šířku vzorku definuje omezující potenciál $V_0(y)$, který má tvar široké potenciálové jámy nabývající nulové hodnoty uvnitř pásku. Člen $g\mu_B B s_z$ reprezentuje interakci elektronového spinu $s_z = \pm 1/2$ s magnetickým polem B charakterizovanou energií Zeemanova rozštěpení $g\mu_B B$, kde $\mu_B = e\hbar/(2m_0)$ je Bohrov magneton a g je materiálově závislý Landéův faktor spektroskopického rozštěpení. Landauův nesymetrický výběr vektorového potenciálu $\vec{A} = (-By, 0, 0)$ umožňuje separaci proměnných a vlastní funkce lze pak psát ve tvaru součinu rovinné vlny ve směru \hat{x} a vázaného modu ve směru \hat{y} , tzv. "spaghetti" stavů.

V oblasti, kde je omezující potenciál nulový, jsou vázané módy dány vlastními funkcemi harmonického oscilátoru $\phi_n(y)$ a vlastní funkce jsou

$$\Psi_{n,k_x}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_x x} \phi_n\left(\frac{y - Y(k_x)}{l_B}\right); \quad \phi_n(t) \equiv \frac{H_n(t)}{\sqrt{l_B \sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (53)$$

kde $H_n(t)$ jsou Hermitovy polynomy. Magnetická délka l_B definující šířku vlnové funkce ve směru \hat{y} a poloha hmotnostního centra harmonických oscilátorů, těžiště $Y(k_x)$, jsou dány následujícími výrazy:

$$l_B \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad ; \quad Y(k_x) \equiv \frac{\hbar}{eB} k_x = l_B^2 k_x. \quad (54)$$

Poznamenejme, že ve směru \hat{z} předpokládáme existenci potenciálové jámy a tak nízkou elektronovou koncentraci, že je obsazen pouze její nejnižší vázaný mód. V tomto případě dvojrozměrného elektronového plynu není třeba vlastní funkci toho modu explicitně uvádět. Energetické spektrum je diskrétní, sestává z tzv. Landauových hladin, a nezávisí na vlnovém čísle k_x

$$E_{n,s_z}(k_x) = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + g^* \mu_B B s_z \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega_c = \frac{eB}{m^*}, \quad (55)$$

kde ω_c je cyklotronová frekvence. Zeemanův člen $g^* \mu_B B s_z$ nemá pro pochopení podstaty kvantového Hallova jevu podstatný význam. V zájmu jednoduchosti výkladu nebude proto v následujícím výkladu brán v úvahu.

Pokud jsou všechny stavy v dané n -té Landauově hladině obsazené, odpovídající příspěvek k plošné hustotě elektronů je konstantní

$$\begin{aligned} n_e^{(n)}(\vec{r}) &\equiv |\Psi_{n,k_x}(\vec{r})|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n^2 \left(\frac{y - Y(k_x)}{l_B} \right) dk_x = \\ &= \frac{1}{2\pi l_B^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n^2 \left(\frac{y - y'}{l_B} \right) dy' = \frac{eB}{h} = \frac{B}{\Phi_0}. \end{aligned} \quad (56)$$

Z toho plyne, že i hustota stavů v Landauově hladině je eB/h a na jeden stav připadá jedno kvantum magnetického toku $\Phi_0 = h/e$. Je tedy vhodné zavést plnicí faktor ν , který je definován jako počet obsazených stavů připadajících na jedno kvantum magnetického toku. Formálním dosazením do vztahu (51) pro Hallův odpor dostaneme

$$n_e = \nu \frac{eB}{h} = \nu \frac{B}{\Phi_0} \quad \Rightarrow \quad R_H = -\frac{B}{en_e} = -\frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}. \quad (57)$$

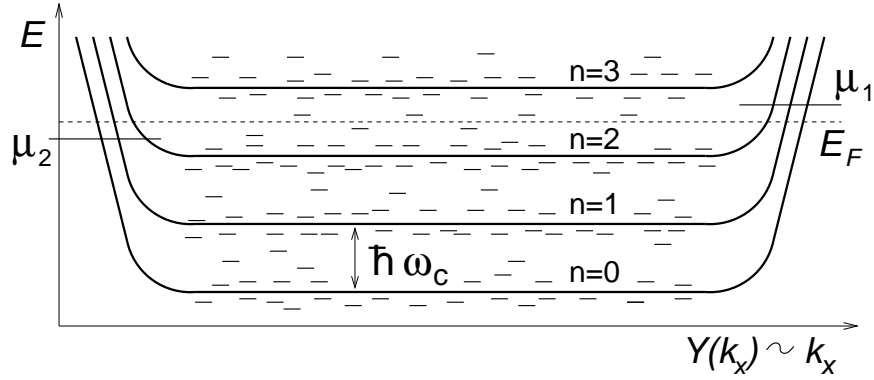
Pokud je plně zaplněno i Landauových hladin a ostatní jsou prázdné, je plnicí faktor celočíselný a právě roven i , $\nu \rightarrow i$. Hallův odpor by v tomto případě nabýval kvantových hodnot daných poměrem kvantové jednotky odporu h/e^2 a celého čísla. Avšak, pro danou koncentraci elektronů je plnicí faktor nepřímě úměrný magnetickému poli a Hallův odpor dle výše uvedeného vztahu je tedy lineární funkcí magnetického pole jako v klasickém případě a nevysvětluje naměřenou schodovitou závislost.

Pozorovaná existence prodlev Hallova odporu v závislosti na magnetickém poli vyžaduje detailnější rozbor vlastností energetického spektra. Předpokládejme, že v blízkosti hran pásku je omezující potenciál pomalu se měnící funkcí y , a to tak, že na intervalu daném

magnetickou délkou l_B jej lze považovat za konstantní, $(dV_o/dy)l_B \ll \hbar\omega_c$. V takovém případě lze změnu energie aproximovat střední hodnotou omezujícího potenciálu

$$E_n(k_x) = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \langle n, k_x | V_o(y) | n, k_x \rangle = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + V_o(Y(k_x)) . \quad (58)$$

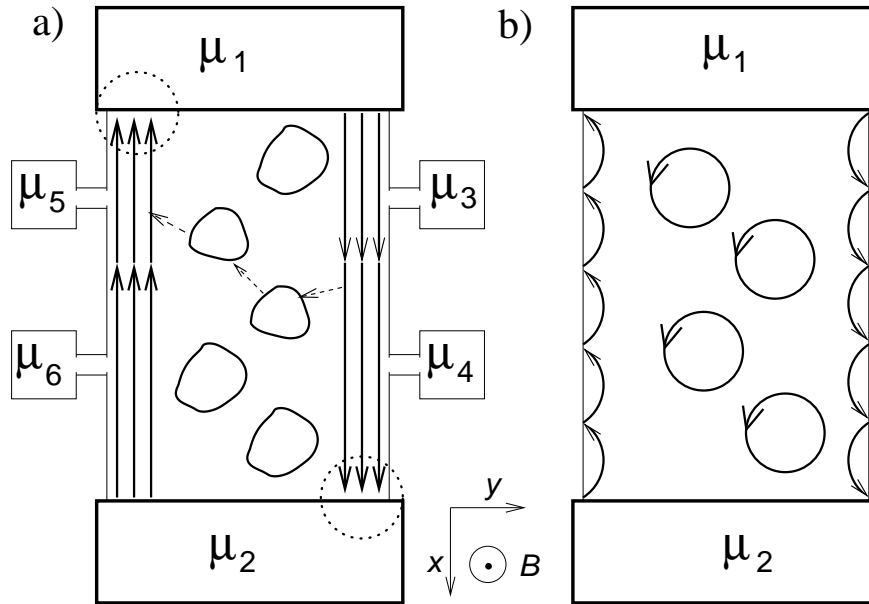
Degenerace energetického spektra v k_x je tak částečně sejmuta. Vzhledem k tomu, že poloha těžiště elektronů $Y(k_x)$ je lineární funkcí k_x , vztah (54), můžeme větve energetického spektra znázorňovat jako funkci těžiště, viz Obr. 14. Obecně platí, že jakýkoliv rostoucí (klesající) potenciál $V_o(y)$ vyvolá příspěvek k energii, který je rostoucí (klesající) funkcí $Y(k_x)$, i když odpovídající funkční závislost k_x má složitější tvar než v popsaném případě pomalu se měnícího potenciálu.



Obrázek 14: Energie Landauových stavů v závislosti na poloze center $Y(k_x)$, silné linie. Krátké vodorovné čárky znázorňují lokalizované stavy.

Vzhledem k tomu, že střední hodnota rychlosti ve směru \hat{x} je dána derivací energie podle k_x , viz vzorec (9), mají elektrony nenulovou rychlost pouze v blízkosti hran vzorku. Díky Lorentzově síle mají rychlosti elektronů u protilehlých hran pásku opačný směr. Tyto, tzv. hranové stavy, vytvářejí pro elektrony jednosměrné vodivostní kanály, které jsou prostorově odděleny, jak je znázorněno na Obr. 15a. Jejich klasický ekvivalent je znázorněn na Obr. 15b. Klasická nabitá částice se v magnetickém poli pohybuje po kruhové dráze. U hran však naráží na stěnu reprezentující hranu pásku, odráží se od ní, a důsledkem je pohyb částice podél hran vzorku. Podél hran teče elektrický proud i ve stavu termodynamické rovnováhy. Jsou to tzv. demagnetizační proudy, které snižují celkový diamagnetický moment indukovaný magnetickým polem. V klasické limitě přesně kompenzují diamagnetický moment elektronů uvnitř vzorku.

V případě ideálního systému s konstantním potenciálem uvnitř vzorku se v energetické oblasti mezi Landauovými hladinami vyskytují pouze elektrony v hranových stavech lokalizovaných v blízkosti hran pásku. U každé z hran se vyskytují pouze stavy, jejichž střední hodnota rychlosti má stejné znaménko. Přechody mezi hranovými stavy při jedné hraně, které mohou být vyvolány rozptylem, nemohou tedy vést ke zpětnému rozptylu, který



Obrázek 15: a) Dráhy elektronů na Fermiho mezi. Hranové stavy reprezentují přímé linie v blízkosti hran vzorku, uzavřené křivky znázorňují lokalizované stavy. Tečkované kružnice vymezují oblasti disipace energie za předpokladu, že $\mu_1 > \mu_2$. b) Dráhy elektronu jako klasické částice. Šipky znázorňují směr pohybu elektronů.

je podstatný pro existenci elektrického odporu. Nedokáží změnit velikost proudu podél hrany. Přechody do hranových stavů na protilehlé hraně, které se vyznačují opačným směrem rychlosti, jsou potlačeny, pokud je šířka vzorku podstatně větší než magnetická délka l_B . Důvodem je, že překryv vlnových funkcí lokalizovaných u protilehlých hran vzorku je v takovém případě zanedbatelný. Popsané vlastnosti odpovídají situaci, kdy Fermiho energie leží v oblasti mezi Landauovými hladinami. Obvykle se tento režim nazývá režimem kvantového Hallova jevu. Situace se změní, pokud Fermiho energie leží v některé z Landauových hladin. V hladině se pak vyskytují jak obsazené, tak i neobsazené stavy, což umožňuje přechody elektronů mezi stavy reprezentovanými vlnovým číslem k_x . Se změnou k_x je spojena změna polohy těžiště $Y(k_x)$ a elektrony tedy mohou putovat napříč vzorkem. Tím jsou umožněny přechody mezi protilehlými hranami pásku a tedy i zpětný rozptyl, který vždy vede k nenulové hodnotě odporu.

V režimu kvantového Hallova jevu se díky nulovému zpětnému rozptylu dvojrozměrný elektronový systém o konečné šířce, byť makroskopických rozměrů, chová jako balistický vodič s celočíselným počtem vodivostních kanálů (viz kap. 2.2). Ten je dán počtem větví energetického spektra protínajících Fermiho energii, který je právě roven počtu Landauových hladin pod Fermiho energií, i . Konduktance je pak dána vztahem (20) a nabývá kvantových hodnot $e^2 i/h$. Neexistence zpětného rozptylu zaručuje, že rozdíl chemických potenciálů podél hran je nulový, $\mu_3 = \mu_4 = \mu_1$ a $\mu_5 = \mu_6 = \mu_2$, viz Obr. 15a. Spád napětí ve směru proudu je tedy nulový a podélný odpor vymizí. Z toho vyplývá, že proud je

veden bez energetických ztrát, tedy bez disipace energie. V tomto režimu nabývá Hallův odpor kvantových hodnot. Za předpokladu, že $\mu_1 > \mu_2$, elektrony se pohybují ve směru \hat{x} , elektrický proud $J = (e^2/h) i (\mu_1 - \mu_2)/e$ teče opačným směrem, dostaneme

$$R_H^{(Q)} \equiv -\frac{\mu_3 - \mu_5}{eJ} = -\frac{\mu_4 - \mu_6}{eJ} = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{eJ} = -\frac{h}{e^2} \frac{1}{i}. \quad (59)$$

Poznamenejme, že v případě kdy jsou nositeli náboje díry nabývají kvantové hodnoty Hallova odporu kladných hodnot. Pokud se Fermiho mez nachází v Landauově hladině je zpětný rozptyl umožněn, podélný odpor $(\mu_3 - \mu_4)/(eJ) = (\mu_5 - \mu_6)/(eJ)$ je nenulový a hodnoty Hallova odporu nabývají hodnot v rozmezí daném jeho nejbližšími kvantovými hodnotami. Píky v závislosti podélného odporu ρ_{xx} na Obr. 13 odpovídají podmínkám, za kterých se Fermiho mez nachází právě ve středu některé z Landauových hladin. V nejvyšších polích lze rozlišit Landauovy hladiny s různou orientací spinu, zatímco ve slabších polích dávajících menší hodnotu Zeemanovy energie se překrývají.

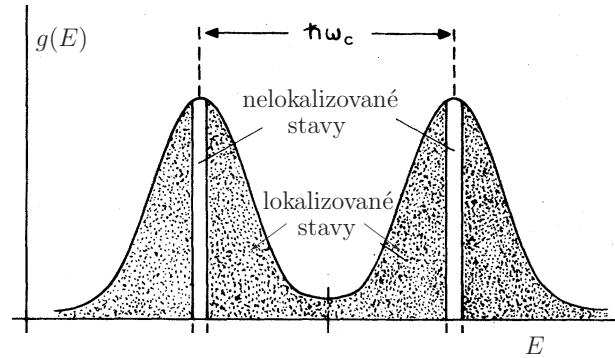
V reálných strukturách, díky různým poruchám, není potenciál uvnitř vzorku konstantní. Fluktuační potenciálu vedou k rozšíření Landauových hladin na energetické pásy, ve kterých dochází k jevu lokalizace, jak je schematicky znázorněno na Obr. 16. Jedná se o silnou lokalizaci, kdy koherentní délka λ_ϕ je větší než lokalizační délka L_{lok} . Fyzikální podstata vzniku lokalizovaných stavů je však stejná jako v již diskutovaném případě slabé lokalizace, kdy $\lambda_\phi \ll L_{\text{lok}}$. Lokalizované stavy se objeví v energetickém pásu mezi Landauovými hladinami, jak je znázorněno na Obr. 14.

V případě silných magnetických polí a pomalu se měnícího potenciálu $V(x, y)$ uvnitř vzorku si lokalizované stavy můžeme představit jako vnitřní hranové stavy, viz Obr. 15a. Elektrony se pohybují po ekvivalentních drahách, vrstevnicích, definovaných rovnicí

$$E = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + V(x, y). \quad (60)$$

Pokud vzdálenosti mezi drahami jsou podstatně větší než magnetická délka l_B , je pravděpodobnost přechodu mezi lokalizovanými stavy zanedbatelná. Přechod elektronů mezi stavy na protilehlých hranách vzorku není v takovém případě možný, stejně jako tomu bylo v případě konstantního potenciálu uvnitř vzorku.

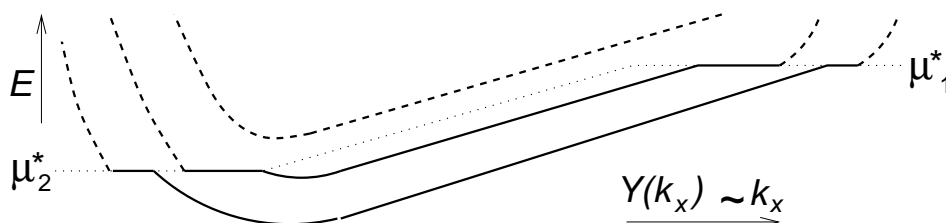
Pro existenci širokých prodlev Hallova odporu v závislosti na magnetickém poli je přítomnost lokalizovaných stavů podstatná. Pokud by neexistovaly, udržovala by se Fermiho mez pro velké intervaly magnetických polí v Landauově hladině. V okamžiku naplnění či vyprázdňování všech stavů v hladině by se Fermiho hladina velmi rychle zachytila v sousední Landauově hladině. Lokalizované stavy umožňují, aby se Fermiho energie nacházela v širokém intervalu magnetických polí právě v oblasti mezi Landauovými hladinami, tedy v



Obrázek 16: Závislost hustoty stavů $g(E)$ rozšířených Landauových hladin na energii.

režimu kvantového Hallova jevu. Pokud by však fluktuační potenciály byly příliš silné, mohl by být jeho vliv na energetické spektrum elektronů podstatnější než vliv magnetického pole. V takovém případě by systém vykazoval klasickou závislost Hallova odporu na magnetickém poli, podobně jako při teplotách, pro něž je tepelná energie větší než energetický rozdíl mezi Landauovými hladinami, $k_B T > \hbar \omega_c$.

Uvedený popis kvantového Hallova jevu by mohl vést k závěru, že elektrický proud teče pouze po hranách pásku. Ve skutečnosti tomu tak není. Odchytky chemických potenciálů v blízkosti hran pásku od rovnovážných hodnot vyvolávají změnu koncentrace nositelů, a tedy i náboje. Ta je zodpovědná za vznik elektrického pole napříč páskem, a tedy i gradientu elektrostatického potenciálu. Odpovídající lokální změny energie si lze představit tak, že Landauovy hladiny v závislosti na poloze budou mít nenulový sklon a elektronové stavy nenulovou střední hodnotu rychlosti. Z požadavku nábojové neutrality zajišťujícího, že uvnitř vzorku musí být koncentrace elektronů rovna jejich rovnovážné koncentraci, plyne, že Fermiho energie bude mít napříč vzorkem stejný sklon jako Landauovy hladiny.



Obrázek 17: Schematické znázornění závislosti energie Landauových stavů na poloze center $Y(k_x)$ v režimu kvantového Hallova jevu. Plná čára znázorňuje obsazené stavy, čárkovaná prázdné. Průběh Fermiho energie je zobrazen tečkovaně.

Změny elektronové koncentrace u hran vzorku mají vliv i na hranové stavy. Ty jsou modifikovány coulombickou interakcí elektronů s kladným nábojem pozadí, která je zodpovědná za tvorbu omezujícího potenciálu. Rozbor založený na podmínce minimalizace coulombické energie vede k závěru, že na Fermiho energii existují oblasti s nulovou disperzí hranových stavů [18], jak je znázorněno na Obr. 17. Vzhledem k tomu, že konduktance balistického vodiče, tedy vodiče, ve kterém je potlačen zpětný rozptyl, nezávisí na tvaru energetické disperze $E_n(k_x)$, diskutovaná modifikace energetického spektra nevede ke změně konduktance a tedy ani Hallova odporu. Energie μ_1^* a μ_2^* na Obr. 17 jsou dány nejen změnou elektronové koncentrace, ale i indukovaným elektrickým polem. Jedná se tedy o elektrochemické potenciály, jejichž rozdíl odpovídá měřenému napětí. Je to i v souladu s obecnou zákonitostí, že v lineárním přiblížení dává odezva jak na gradient chemického potenciálu, tak i na elektrické pole, stejný výsledek.

Režim kvantového Hallova jevu je režimem nedisipativním. Vzhledem k tomu, že celkový odpor měřený mezi proudovými přírady není nulový, musí někde docházet k disipaci energie. Ukazuje se, že je to právě v blízkosti proudových kontaktů, a to v místech, kde je rozdíl potenciálů největší, viz Obr. 15a. Disipovaná energie se přeměňuje v tepelnou energii mřížky, což vede k lokálnímu zvýšení teploty. Jednou z metod, kterou byla

tato skutečnost experimentálně ověřena, bylo využití fontánového jevu supratekutého ${}^4\text{He}$ [19, 8]. Díky tomuto jevu je tloušťka ${}^4\text{He}$ filmu, kterým je vzorek pokryt, větší v místech s vyšší teplotou. Změny tloušťky filmu byly detekovány optickými metodami. V analogii s kvazi-jednorozměrnými systémy lze tedy i kvantový Hallův odpor považovat za vstupní, kontaktní odpor.

S rostoucím proudem roste Hallovo napětí, tedy i sklon Landauových hladin a lze očekávat, že existuje kritická hodnota proudu, při jejímž překročení systém z režimu kvantového Hallova jevu vypadne. To nastane tehdy, dojde-li k excitacím umožňujícím přechody elektronů mezi stavy nakloněných Landauových hladin. Hrubý odhad lze získat použitím Landauovy podmínky pro kritický proud jehož překročením dojde ke spontánní emisi fononů. Z ní vyplývá, že kritická proudová hustota $j_c \equiv ev_D n_e$ bude mít hodnotu určenou podmínkou, že driftová rychlost elektronů v_D dosáhne rychlosti zvuku u v daném materiálu. V režimu kvantového Hallova jevu s i plně obsazenými Landauovými hladinami je elektronová hustota $n_e = ieB/h$ a pro kritickou proudovou hustotu dostaneme

$$j_c = eun_e = i \frac{e^2}{h} B u. \quad (61)$$

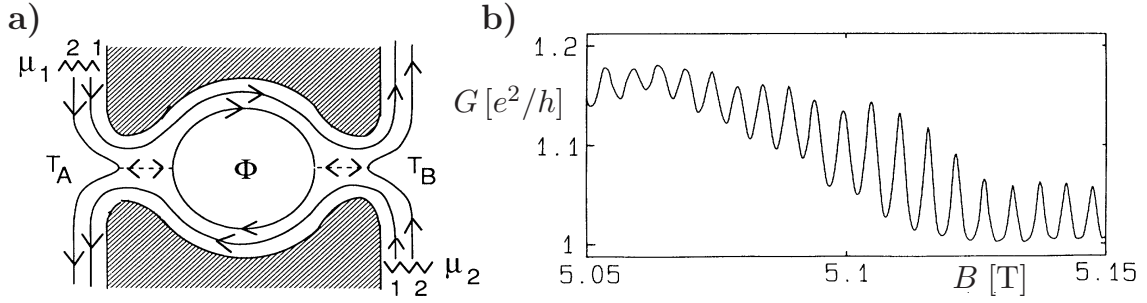
Měřené hodnoty kritických proudů jsou obvykle v souladu s uvedeným vztahem. Pro představu, v polovodičích je $u \sim 2000 \text{ m s}^{-1}$ a pro $i = 1$ a $B \sim 7 \text{ T}$, je $j_c \sim 1 \text{ A m}^{-1}$. Při překročení kritického proudu začnou elektrony spontánně vyzařovat fonony, podobně jako letadlo při překročení rychlosti zvuku.

Kvantový Hallův odpor je dán celočíselným zlomkem univerzální konstanty h/e^2 . Naměřené hodnoty jsou tedy nezávislé na dalších charakteristikách systému a na materiálu použitém pro přípravu dvojrozměrného elektronového systému. To je důvod, proč celočíselný kvantový Hallův jev našel uplatnění v metrologii jako standard elektrického odporu.

3.2 Hranové stavy a Aharonův-Bohmův jev

Hranové stavy indukované kvantujícím magnetickým polem vytvářejí podél hran vzorku kvazi-jednorozměrné vodivé kanály. V konečném vzorku kruhového tvaru poteče tedy v režimu kvantového Hallova jevu proud podél jeho kraje. Ten tvoří proudovou smyčku, uvnitř které by měl být magnetický tok Φ roven celočíselnému násobku magnetických kvant $\Phi_0 = h/e$. Propojíme-li vzorek vodivými kontakty s proudovými přívody tvořenými dvojrozměrným elektronovým plynem v režimu kvantového Hallova jevu, lze na takové struktuře, znázorněné na Obr. 18a, měřit konduktanci.

Za předpokladu, že nedochází k přechodům mezi jednotlivými větvemi hranových stavů, tvoří každá z těchto větví samostatný jednorozměrný vodivostní kanál. Pouze pro nejvnitřnější větev, která je nejvíce vzdálena od krajů vodivé oblasti, může pak docházet ke zpětnému rozptylu v úzkých místech, vodivých kontaktech A a B. Díky jednosměrnosti vodivostních kanálů je tento rozptylový problém ekvivalentní rozptylu elektronu na dvou rozptylových centrech v jednorozměrném vodiči. Navíc však musíme vzít v úvahu závislost fáze na vektorovém potenciálu (36). Označíme-li pravděpodobnosti průchodu kontakty



Obrázek 18: a) Schéma vodivostní struktury v režimu kvantového Hallova jevu s $i = 2$. b) Aharonov-Bohmovy oscilace v konduktanci G s periodou $\Phi_0 = h/e$, měřené na AlGaAs/GaAs struktuře při teplotě 50 mK.

jako $T_A = 1 - R_A$ a $T_B = 1 - R_B$, dostaneme v analogii se vztahem (26) následující vztah pro transmisní koeficient $T_{A,B}$, který definuje konduktanci struktury

$$\frac{h}{e^2} G = \mathcal{T}_{A,B} = i - 1 + \frac{T_A T_B}{1 - 2\sqrt{R_A R_B} \cos\left(\theta + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + R_A R_B}, \quad (62)$$

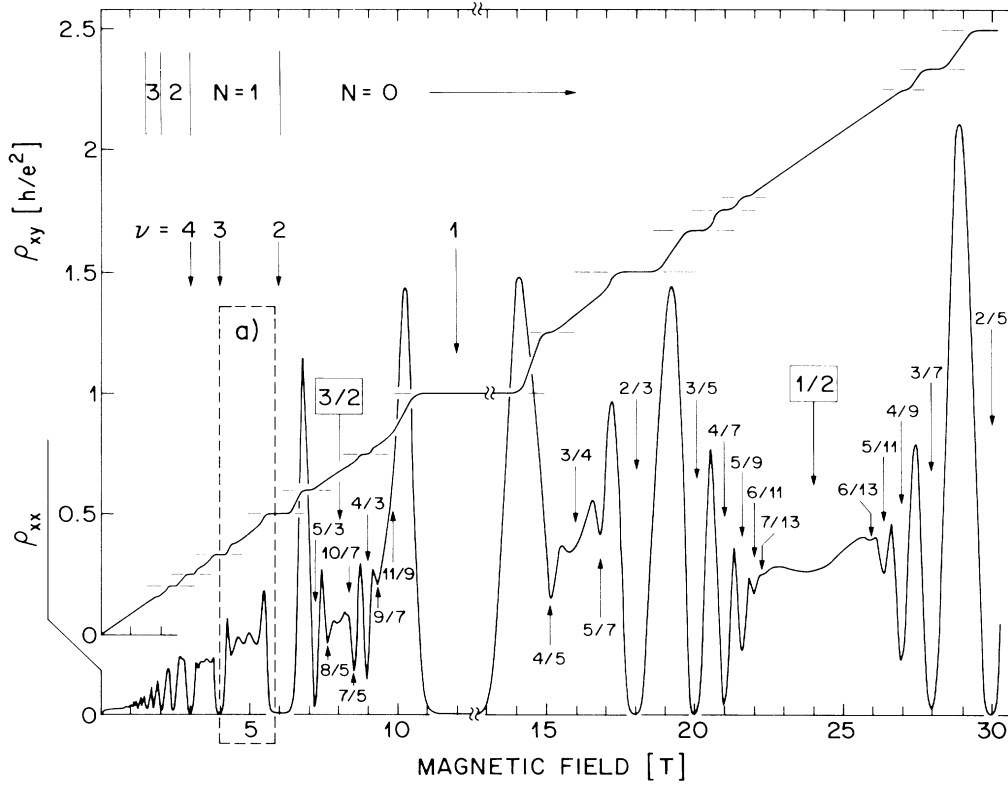
kde i definuje kvantový režim v přívodech a θ je fázový posun nezávislý na magnetickém toku Φ . Konduktance je tedy oscilující funkcí magnetického pole se základní periodou Φ_0 reprezentující Aharonův-Bohmův jev. Odpovídající měřená závislost je na Obr. 18b [20].

3.3 Zlomkový kvantový Hallův jev

Již v roce 1982 došlo při měření kvantového Hallova jevu k dalšímu překvapení. Tsui, Störmer a Gossard v závislostech na magnetickém poli objevili prodlevu s hodnotou Hallova odporu $R_H = 3h/e^2$ odpovídající podmínkám, při kterých je zaplněna nejnižší Landauova hladina pouze z jedné třetiny [21], $i \rightarrow 1/3$. Coulombickou interakci jako fyzikální příčinu existence naměřeného zlomkového Hallova jevu odhalil Laughlin, který spolu se Störmerem a Tsuiem za tento objev obdržel v roce 1998 Nobelovu cenu. Objev byl umožněn pokrokem v technologii přípravy dvojrozměrných elektronových systémů, které vykazovaly stále větší elektronovou pohyblivost. S postupem času byla pozorována série prodlev v Hallově odporu odpovídající hodnotám

$$R_H^{(Q)} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}, \quad (63)$$

kde plnicí faktor ν nabýval hodnot daných poměrem dvou celých čísel, přičemž jmenovatel byl lichý. Jako v případě celočíselného Hallova jevu byl v oblasti prodlev pozorován pokles podélného odporu. Díky dokonalosti studovaných dvojrozměrných systémů, ve kterých byly výrazně potlačeny potenciálové fluktuační, byla snížena hustota lokalizovaných stavů a prodlevy odpovídající celočíselnému Hallovu jevu byly mnohem užší ve srovnání s méně dokonalými systémy, na kterých byl pozorován pouze celočíselný Hallův jev. Typický příklad zlomkového kvantového Hallova jevu, převzatý z práce [22], je na Obr. 19.



Obrázek 19: Zlomkový kvantový Hallův jev. Závislost podélného odporu ρ_{xx} a Hallova odporu ρ_{xy} na magnetickém poli naměřená na heterostruktuře AlGaAs/GaAs s elektronovou pohyblivostí $300\,000\text{ cm}^2\text{ V}^{-1}\text{ s}^{-1}$ při teplotě 400 mK.

Hamiltonián pro N_e interagujících elektronů má tvar

$$H = \frac{1}{2m^*} \sum_{i=1}^{N_e} [\vec{p}_i + e\vec{A}(\vec{r}_i)]^2 + \sum_{i=1}^{N_e} \left[V(\vec{r}_i) + \sum_{j<i}^{N_e} \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right], \quad (64)$$

kde $V(\vec{r})$ je potenciál kladného pozadí zajišťující nábojovou neutralitu celého systému. V téměř ideálních dvojrozměrných systémech je možno kladný náboj pozadí považovat za homogenně rozprostřený v prostoru. Standardní postup při řešení mnoha-částicového problému vychází z vlastních funkcí jedno-částicového Hamiltoniánu z nichž se sestavuje Slaterův determinant jako nulové přiblížení. Vzhledem k tomu, že coulombická interakce závisí na rozdílech souřadnic, je vhodné použít pro vektorový potenciál tzv. symetrický výběr, $\vec{A} = B(-y/2, x/2, 0)$. Vlastní funkce pak mají v polárních souřadnicích následující tvar

$$\Psi_{n_r, m}(\vec{r}) = \frac{1}{l_B} \sqrt{\frac{n_r!}{(n_r + m)!}} \left(\frac{r}{l_B \sqrt{2}} \right)^{|m|} L_{n_r}^{|m|} \left(\frac{r^2}{2l_B^2} \right) e^{-\frac{r^2}{4l_B^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad (65)$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $L_n^\alpha(t)$ jsou Laguerrovy polynomy a $n_r = 0, 1, \dots$ je radiální kvantové číslo. Orbitální celé číslo m , které definuje kvantové hodnoty orbitálního momentu $\hbar m$, musí

splňovat podmínku $2n_r + |m| - m \geq 0$. Na rozdíl od vlastních funkcí (53) pro nesymetrický Landauův výběr jsou tyto funkce lokalizované ve všech směrech. Energetické spektrum je nezávislé na výběru vektorového potenciálu \vec{A} a je tedy tvořeno diskretními Landauovými hladinami

$$E_{n_r}(m) = \hbar\omega_c \left(n_r + \frac{|m| - m + 1}{2} \right) \equiv \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (66)$$

kde n je index Landauovy hladiny.

V dalším výkladu se pro jednoduchost omezíme na nejnižší Landauovu hladinu s $n = 0$, pro kterou $n_r = 0$, orbitální číslo nabývá pouze nezáporných hodnot ($m = 0, 1, \dots$), $L_0^m(t) = 1$ a vlastní funkce mají následující tvar

$$\Psi_{0,m}(z) = \frac{1}{l_B} \sqrt{\frac{1}{2\pi m! 2^m}} z^m e^{-\frac{|z|^2}{4}} \quad ; \quad z \equiv \frac{r}{l_B} e^{i\phi}. \quad (67)$$

Vlnová funkce pro N_e elektronů, daná Slaterovým determinantem, má v tomto případě tvar Jastrowových funkcí

$$\Psi_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N_e}) = C \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \prod_{i=1}^{N_e} e^{-\frac{|z_i|^2}{4}} = C \prod_{j<k}^{N_e} (z_j - z_k) \prod_{i=1}^{N_e} e^{-\frac{|z_i|^2}{4}}, \quad (68)$$

kde C je normalizační faktor. Rozdíl $z_j - z_k$ reprezentuje odpuzování elektronů. Vyjadřuje skutečnost, že dva elektrony se nemohou vyskytovat na stejném místě.

V případě plně obsazené Landauovy hladiny je elektronová hustota konstantní, viz vztah (56), a ideálně odstiňuje homogenní kladné pozadí. Není-li plně obsazena, elektronové stavy by měly být rozprostřeny řidčeji po prostoru, měly by se tedy více odpuzovat a tak lépe odstiňovat kladné pozadí. Laughlin navrhl popsat takový stav Jastrowovými funkcemi (68), ve kterých je rozdíl $z_j - z_k$ nahrazen jeho mocninou, která zaručuje silnější odpuzování elektronů. Ta musí nabývat lichých hodnot, aby byla zaručena antisymetričnost mnohaelektronového stavu

$$\Psi_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N_e}) = C \prod_{j<k}^{N_e} (z_j - z_k)^{2p+1} \prod_{i=1}^{N_e} e^{-\frac{|z_i|^2}{4}}. \quad (69)$$

Lze očekávat, že tato substituce povede ke snížení hustoty náboje v porovnání s případem plně obsazené Landauovy hladiny.

Máme-li k dispozici N_e elektronů, zaplňují postupně jedno-částicové stavy s $m = 0, 1, 2, \dots, N_e - 1$. Plocha zaplněná elektrony bude reprezentována poloměrem daným nejvyšší mocninou souřadnice z_j , tedy mocninou $m_p \equiv (2p+1)(N_e - 1)$. Je tedy dána plochou, kterou vymezuje jedno-částicový stav $|0, m_p\rangle$ s vlastní funkcí definovanou vztahem (67),

$$\begin{aligned} \langle 0, m_p | \pi r^2 | 0, m_p \rangle &= \frac{1}{l_B^2 m_p! 2^{m_p}} \int_0^{+\infty} r dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \pi r^2 \left(\frac{r^2}{l_B^2} \right)^{m_p} e^{-\frac{r^2}{2l_B^2}} = \\ &= \frac{2\pi l_B^2}{m_p!} \int_0^{+\infty} x^{m_p+1} e^{-x} dx = \frac{2\pi l_B^2}{m_p!} \Gamma(m_p + 2) = 2\pi l_B^2 [(N_e - 1)(2p + 1) + 1], \end{aligned} \quad (70)$$

kde $\Gamma(m_p + 2) = (m_p + 1)!$. Počet elektronů připadající na plochu, kterou prochází jedno kvantum magnetického toku, plnicí faktor ν , je tedy pro makroskopické systémy a nejnižší Landauovu hladinu dán následujícím vztahem :

$$\nu = \lim_{N_e \rightarrow +\infty} \frac{2\pi l_B^2 N_e}{\langle 0, m_p | \pi r^2 | 0, m_p \rangle} = \frac{1}{2p + 1} . \quad (71)$$

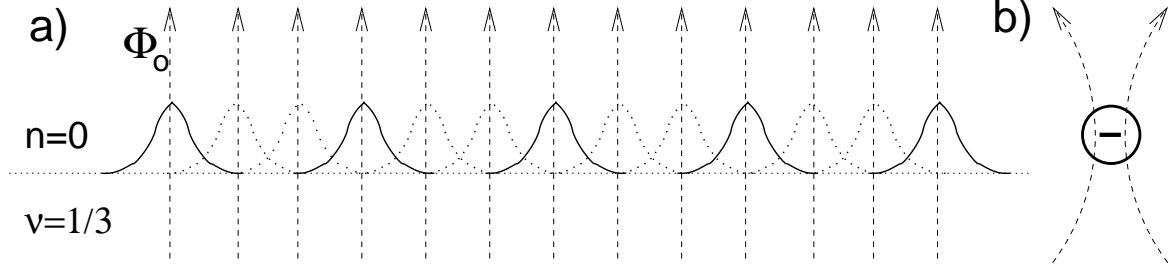
Pro tyto plnicí faktory je homogenní kladné pozadí dobře odstíněno a lze očekávat, že základní stav bude dobře aproximován funkcemi Jastrowova typu. Bylo prokázáno, že excitované stavy jsou odděleny od tohoto základního stavu energetickou mezerou. Ta je však menší, než v případě plně zaplněných Landauových hladin, kdy excitační energie je dána cyklotronovou energií $\hbar\omega_c$. To je příčinou, proč se zlomkový Hallův jev pozoruje na dokonalejších dvojrozměrných systémech s vysokou elektronovou pohyblivostí. Budeme-li vycházet z plně zaplněné Landauovy hladiny a výše uvedený postup aplikovat na díry, dostaneme stabilní základní stav pro plnicí faktory

$$\nu = 1 - \frac{1}{2p + 1} = \frac{2p}{2p + 1} . \quad (72)$$

Uvedené hodnoty plnicích faktorů jsou v soulase s řadou hodnot Hallova odporu v pozorovaných prodlevách. Pro vysvětlení dalších experimentálně pozorovaných zlomkových plnicích faktorů je teoretický popis složitější.

Snahou teorie je nejen popsat a nalézt fyzikální příčiny pozorovaných vlastností, ale také nalézt dostatečně jednoduchý popis. To obvykle vede k zavedení slabě interagujících kvazičástic do jejichž vlastností je zahrnut podstatný vliv interakce. Jaké kvazičástice by mohly přicházet v úvahu lze usoudit z hustoty rozložení náboje odpovídající jedno-elektronovému popisu, jak je schematicky znázorněno na Obr. 20a pro tzv. spaghetti states dané vztahem (53). Je zřejmé, že při částečném zaplnění stavů Landauovy hladiny je kladný potenciál pozadí nerovnoměrně odstiňován. Důsledkem je výrazné zvýšení celkové energie o energii coulombickou. První z ideí bylo, rozprostřít náboj elektronů rovnoměrně v prostoru, jinými slovy přidělit Landauovým stavům zlomkový náboj. Takto zavedené kvazičástice by pak měly zlomkový náboj, například pro třetinové zaplnění Landauovy hladiny, by všechny stavy byly obsazeny, ale každý z nich by nesl náboj $e/3$. Odstínění pozitivního náboje by bylo ideální. S nábojem však bylo třeba rozdělit rovnoměrně i spin. Takové kvazičástice pak nejsou ani bozony ani fermiony, jsou to anyony řídicí se nestandardní anyonovou statistikou, což bylo hlavní příčinou proč takové kvazičástice nebyly širokou fyzikální komunitou akceptovány.

Úspěšné bylo teprve zavedení kvazičástic nazývaných kompozitní fermiony. Vychází z experimentálního pozorování, že v případě polovičního zaplnění Landauovy hladiny, se systém chová téměř jako kov v nulovém magnetickém poli. Jedná-li se o nejnižší Landauovu hladinu, $n = 0$, můžeme například vytvořit kvazičástici, kompozitní fermion, složenou z jednoho elektronu a dvou kvant magnetického toku, znázorněnou na Obr. 20b. Dvě kvanta magnetického toku reprezentují magnetické pole B_0 , a kompozitní fermion tedy cítí pouze magnetické pole dané rozdílem aplikovaného pole B a pole B_0 . Redukované pole $\Delta B =$



Obrázek 20: a) Rozložení hustoty náboje v nejnižší Landauově hladině zaplněné z jedné třetiny bez započtení coulombické interakce. Plnou čarou jsou znázorněny obsazené stavy, tečkovanou prázdné stavy. Každá z čárkovaných silokřivek znázorňuje kvantum magnetického toku Φ_0 . b) Schéma kompozitního fermionu, elektronu svázaného se dvěma kvanty magnetického toku.

$B - B_0$ kvantuje stavy kompozitních fermionů stejně jako stavy elektronů volných, což vede ke vzniku Landauových hladin. Odpovídající cyklotronová frekvence je však menší, dána redukováným polem, $\omega_{\text{CF}} = e\Delta B/m_{\text{CF}}^*$. Díky interakci mezi elektrony je efektivní hmotnost kompozitních fermionů obvykle větší než elektronů v nulovém magnetickém poli.

Vztah mezi plnicím faktorem pro kompozitní fermiony ν_{CF} a faktorem $\nu < 1$ je dán následující rovností

$$\nu = \frac{n_e}{\frac{eB}{h}} = \frac{n_e}{\frac{e(B_0 + \Delta B)}{h}} = \frac{\nu_0}{1 + \frac{\Delta B}{B_0}} = \frac{\nu_{\text{CF}}}{1 + \frac{\nu_{\text{CF}}}{\nu_0}} \quad ; \quad \nu_0 \equiv \frac{n_e}{\frac{eB_0}{h}}, \quad (73)$$

kde n_e je plošná koncentrace elektronů. V případě, že budou plně obsazeny Landauovy hladiny kompozitních fermionů, $\nu_{\text{CF}} = 1, 2, \dots$, bude elektronová nábojová hustota homogenní a kladný náboj pozadí bude optimálně kompenzován. V takových případech lze očekávat vznik režimu kvantového Hallova jevu. Odpovídající hodnoty plnicích faktorů ν definuje vztah (73) s ν_{CF} nabývajícím celočíselných hodnot. Vezmeme-li v úvahu i elektronovou-děrovou symetrii ($\nu \rightarrow 1 - \nu$) dostaneme pro nejnižší Landauovu hladinu, pro kterou $\nu_0 = 1/2$, následující kvantové hodnoty Hallova odporu

$$R_{\text{H}}^{(\text{Q})} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu} \quad , \quad \nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \dots, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \dots \quad (74)$$

Tyto zlomkové hodnoty plnicích faktorů jsou plně v soulasu s pozorovanými hodnotami, viz Obr. 19. Musíme mít však na paměti, že započtení interakce je pouze přibližné a dobře platí pouze pro ty plnicí faktory, které se příliš neliší od plnicího faktoru ve středu Landauovy hladiny. Pro vysvětlení dalších pozorovaných hodnot zlomkového Hallova odporu je třeba vytvářet kompozitní fermiony vyššího řádu, sestavené z doposud uvažovaných kompozitních fermionů a kvant magnetického toku. Za podmínky, že je obsazeno více Landauových hladin, tvoří plně obsazené hladiny homogenní pozadí a zlomkový Hallův jev je možno pozorovat pro plnicí faktory dané vztahem (74), navýšené o počet plně obsazených hladin.

Zavedení kompozitních fermionů umožňuje aplikovat všechny představy spojené s režimem celočíselného Hallova jevu, jako je například existence hranových a lokalizovaných stavů, i na případ zlomkového Hallova jevu. Čím je systém dokonalejší, neuspořádanosti ubývá, tím více zlomkových hodnot je možno pozorovat. Na druhé straně se však prodlevy v Hallově odporu zužují a pro dokonale homogenní systémy lze předpokládat, že Hallův odpor poroste lineárně s magnetickým polem, $R_H = (h/e^2)(1/\nu)$. Lze tedy očekávat, že na dokonalých vzorcích bude pozorována stejná závislost, jakou již v roce 1897 pozoroval objevitel Hallova jevu, Edwin Herbert Hall, jako student posledního ročníku na universitě Johna Hopkinse v Baltimore, na kovových páskách.

3.4 Blochovy elektrony v kvantujícím magnetickém poli a Hallův jev

V nulovém magnetickém poli je energetické spektrum elektronů v krystalických strukturách tvořeno řadou pásů, které mohou být odděleny energetickými mezerami. Nutnou podmínkou pro jejich existenci je, že pod touto mezerou musí připadat na jednu elementární celou celočíselný počet stavů. Na druhou stranu, jak již bylo popsáno, pro volné elektrony v silném magnetickém poli je nutnou podmínkou existence intervalu zakázaných energií, aby pod tímto intervalem připadal celočíselný počet stavů na jedno kvantum magnetického toku. Zajímavým problémem, který se těší značnému zájmu fyzikální komunity je, jak bude vypadat energetické spektrum krystalů v kvantujících magnetických polích, jinými slovy, jak dopadne souboj kvantování stavů periodickým potenciálem s kvantováním magnetickým polem.

Nutnou podmínku pro polohu energetických mezer lze určit na základě škálovací analýzy, která je pro dvojrozměrné systémy poměrně jednoduchá. Požadavek, že v dané ploše A je celočíselný počet elementárních cel o ploše A_0 a prochází jí celočíselný počet magnetických kvant, není možno splnit pro libovolné hodnoty A_0 a B . Nejmenší možné změny δA_0 a δB musí splňovat následující vztahy

$$\frac{A}{A_0 + \delta A_0} - \frac{A}{A_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta A_0 = -\frac{A_0^2}{A + A_0}, \quad (75)$$

$$\frac{A(B + \delta B)}{\frac{h}{e}} - \frac{AB}{\frac{h}{e}} = \frac{A}{2\pi l_B^2} \frac{\delta B}{B} = 1,$$

kde $2\pi l_B^2 = (h/e)/B$ je plocha připadající na jedno kvantum magnetického toku, $\Phi_0 = h/e$. V termodynamické limitě $A \rightarrow +\infty$ jsou změny δA_0 a δB natolik malé, že spektrum nemohou ovlivnit natolik, aby existující energetická mezera zanikla. Pokud bude Fermiho energie E_F ležet v oblasti zakázaných energií, odpovídající změny počtu stavů pod Fermiho energií, $N(E_F)$, tedy mohou být pouze celočíselné

$$s \equiv \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\delta N(E_F)}{\delta A_0} \delta A_0 = -A_0^2 \left(\frac{\partial n(E_F)}{\partial A_0} \right)_{A,B}, \quad (76)$$

$$\sigma \equiv \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\delta N(E_F)}{\delta B} \delta B = 2\pi l_B^2 B \left(\frac{\partial n(E_F)}{\partial B} \right)_{A, A_0}, \quad (77)$$

kde s a σ jsou celá čísla, a $n(E_F)$ označuje integrální hustotu stavů pod Fermiho energií, jinými slovy počet stavů pod E_F připadající na jednotku plochy

$$n(E_F) \equiv \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{N(E_F)}{A} = \left(\frac{\partial N(E_F)}{\partial A} \right)_{A_0, B}. \quad (78)$$

Změnu počtu stavů pod E_F ležící v pásu zakázaných energií vyvolaných nejen malými změnami δA_0 a δB , ale i plochy A , δA , lze obecně vyjádřit následujícím vztahem

$$\delta N(E_F) = \left(\frac{\partial N(E_F)}{\partial A} \right)_{A_0, B} \delta A + \left(\frac{\partial N(E_F)}{\partial A_0} \right)_{A, B} \delta A_0 + \left(\frac{\partial N(E_F)}{\partial B} \right)_{A, A_0} \delta B. \quad (79)$$

Ten lze využitím definic celých čísel s a σ psát ve tvaru

$$\delta N(E_F) = n(E_F) \delta A - \frac{s}{A_0} \frac{A \delta A_0}{A_0} + \frac{\sigma}{2\pi l_B^2} \frac{A \delta B}{B}. \quad (80)$$

Předpokládejme, že změny δA , δA_0 a δB budou takové, že počet elementárních cel i počet magnetických kvant připadajících na plochu $A + \delta A$, bude stejný jako v případě, kdy je uvažována plocha A , elementární cela A_0 a magnetické pole B . Za tohoto předpokladu, kdy budou splněny následující podmínky

$$\frac{A + \delta A}{A_0 + \delta A_0} = \frac{A}{A_0} \quad \Rightarrow \quad \delta A_0 = \frac{A_0}{A} \delta A, \quad (81)$$

$$\frac{A + \delta A}{2\pi l_B^2} \frac{B + \delta B}{B} = \frac{A}{2\pi l_B^2} \quad \Rightarrow \quad \delta B = -\frac{B}{A + \delta A} \delta A,$$

nedojde ke změně počtu stavů pod energií E_F , $\delta N(E_F) = 0$. Ze vztahu (80) pak dostaneme podmínku

$$n(E_F) = \frac{s}{A_0} + \frac{\sigma}{2\pi l_B^2}, \quad (82)$$

kteřou musí splňovat integrální hustota stavů $n(E_F)$, pokud Fermiho energie leží v pásu zakázaných energií. Je to podmínka nutná pro existenci pásu zakázaných energií v okolí E_F , nikoliv však podmínka postačující. Nelze totiž vyloučit možný překryv energetických pásů, jak tomu bývá například u kovových krystalů.

Pro případ nulového magnetického pole je $\sigma = 0$ a s nabývá s rostoucí energií polohy energetické mezery postupně celočíselných hodnot $s = 1, 2, \dots$. V případě nenulového magnetického pole a konstantního potenciálu je tomu právě naopak, $s = 0$ a $\sigma = 1, 2, \dots$ je dáno počtem Landauových hladin pod danou energií. V obecném případě Blochových elektronů v magnetickém poli závisí hodnoty s a σ , které charakterizují danou energetickou mezeru, na vlastnostech studovaného systému, především na typu krystalové mřížky. Jako

příklad uvedeme elektronovou strukturu pro čtvercovou mřížku, v případě, že energetické spektrum v nulovém magnetickém poli lze dobře charakterizovat jedním pásem v přiblížení silně vázaných elektronů, tzv. přiblížení těsné vazby.

V nulovém magnetickém poli mají elektronové stavy v krystalech obecně Blochův tvar a jsou charakterizovány vlnovým vektorem \vec{k} a pásovým indexem n . Jejich energie $E_n(\vec{k})$ je periodickou funkcí \vec{k} s periodou reciproké mřížky. Pro dvojrozměrný krystal mající čtvercovou symetrii s mřížkovou konstantou a je velikost elementární cely $A_0 = a^2$. Energie v \vec{k} -prostoru je pak periodickou funkcí s periodou $2\pi/a$ a při jejím popisu se můžeme omezit na jednu čtvercovou Brillouinovu zónu, tedy například na plochu vymezenou podmínkami $|k_x| \leq \pi/a$ a $|k_y| \leq \pi/a$. Pro daný energetický pás připadá na stavy v jedné Brillouinově zóně právě jeden elektron, nebereme-li v úvahu spinovou degeneraci. V nejjednodušším možném přiblížení silně vázaných elektronů pro čtvercovou mřížku lze v nultém přiblížení předpokládat vlnovou funkci ve tvaru lineární kombinace atomových funkcí $\phi(x, y)$ umístěných v mřížkových polohách $(m_x a, m_y a)$, kde m_x a m_y jsou celá čísla. Pro jednoduchost značení jsme vypustili u atomových funkcí index n číslicující jednotlivé atomové hladiny. V nultém přiblížení můžeme vlnovou funkci zapsat v následujícím tvaru

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \equiv \Psi_{\vec{k}}(x, y) = \sum_{m_x, m_y} C_{m_x, m_y}(\vec{k}) e^{i(k_x m_x + k_y m_y) a} \phi(x - m_x a, y - m_y a). \quad (83)$$

Koeficienty rozvoje $C_{m_x, m_y}(\vec{k})$ jsou dány řešením soustavy rovnic, které mají v reprezentaci atomových funkcí následující tvar

$$e^{-i(k_x m'_x + k_y m'_y) a} \int \phi(x - m'_x a, y - m'_y a) \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_0} + V(\vec{r}) - E \right] \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) d\vec{r} = 0, \quad (84)$$

kde $V(\vec{r}) \equiv V(x, y) = V(x + a, y) = V(x, y + a)$ je periodický potenciál. Za předpokladu, že vezmeme v úvahu pouze překryv atomových funkcí mezi nejbližšími sousedy, dostaneme

$$\begin{aligned} -C_{m_x-1, m_y}(\vec{k}) t e^{-ik_x a} + C_{m_x, m_y}(\vec{k}) [E_n - E] - C_{m_x+1, m_y}(\vec{k}) t e^{ik_x a} + \\ - C_{m_x, m_y-1}(\vec{k}) t e^{-ik_y a} - C_{m_x, m_y+1}(\vec{k}) t e^{ik_y a} = 0, \end{aligned} \quad (85)$$

kde E_n je energie elektronu v izolovaném atomu a t je tzv. překryvový integrál.

System je invariantní vůči translacím o celočíselný násobek mřížkové konstanty. Z toho plyne, že koeficienty $C_{m_x, m_y}(\vec{k})$ jsou invariantní vůči změně indexů m_x a m_y o celé číslo

$$C_{m_x, m_y \pm 1}(\vec{k}) = C_{m_x \pm 1, m_y}(\vec{k}) = C_{m_x, m_y}(\vec{k}) = C, \quad (86)$$

a mají tedy význam jen jako normalizační faktor. Vlastní funkce tak mají požadovaný Blochův tvar, který je důsledkem translační symetrie Hamiltoniánu. Vlastní hodnoty energie, které jsou řešením soustavy rovnic (85), která se díky periodicitě koeficientů $C_{m_x, m_y}(\vec{k})$ redukuje na rovnici jedinou, mají pak následující tvar

$$E(\vec{k}) \equiv E(k_x, k_y) = E_n - 2t \cos(k_x a) - 2t \cos(k_y a). \quad (87)$$

Toto jednopásové přiblížení je platné za předpokladu malého překryvu atomových funkcí splňujícího podmínku, že šířka pásu $8t$ je mnohem menší než vzdálenost nejbližších atomových hladin, a nedojde tedy k překryvu pásů odpovídajících různým atomovým hladinám.

Pokud je koncentrace elektronů velmi malá, připadá na jednu Brillouinovu zónu mnohem méně než jeden elektron a obsazeny jsou pouze stavy u dna pásu s $|k| \ll \pi/a$. V takovém případě můžeme závislost energie na \vec{k} aproximovat rozvojem do druhého řádu v mocninách \vec{k} a dostaneme

$$E(\vec{k}) \equiv E(k_x, k_y) = E_n - 4t + \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m^*} \quad ; \quad m^* \equiv \frac{\hbar^2}{2a^2t}, \quad (88)$$

kde m^* je efektivní hmotnost elektronu. Přiblížení efektivní hmotnosti lze aplikovat od samého počátku, periodický potenciál explicitně nezahrnovat do Hamiltoniánu, a pouze ve členu reprezentujícím kinetickou energii nahradit hmotnost elektronu m_0 hmotností efektivní, m^* . Kvantování stavů magnetickým polem v tomto přiblížení dá vzniknout Landauovým hladinám, jak bylo popsáno v předcházející sekci. Obdobný rozvoj lze použít i v případě téměř zaplněného pásu, pro prázdné stavy v blízkosti horní hrany pásu. Nezaplněné stavy reprezentují díry jejichž efektivní hmotnost je však záporná. Magnetické pole dá vzniknout také Landauovým hladinám jejichž energie však klesá s rostoucím magnetickým polem.

Popsat kvantování stavů magnetickým polem pro elektronové koncentrace, kdy Fermiho mez leží v oblasti energií, pro něž nelze aplikovat přiblížení efektivní hmotnosti, je obtížnější. Magnetické pole vstupuje do Hamiltoniánu prostřednictvím vektorového potenciálu \vec{A} , operátor momentu \vec{p} je nahrazen operátorem $\vec{p} + e\vec{A}$. V případě Landauova výběru, $\vec{A} \equiv (-By, 0, 0)$, má Hamiltonián následující tvar

$$H = \frac{(p_x - eBy)^2}{2m_0} + \frac{p_y^2}{2m_0} + V(x, y) \quad , \quad V(x, y) = \sum_{m_x, m_y} V_a(x - m_x a, y - m_y a), \quad (89)$$

kde $V_a(x, y)$ představuje lokální potenciál v elementární cele o ploše A_0 . Pokud by byl lokální potenciál izolován v prostoru, odpovídající vlastní funkce by reprezentovaly stavy izolovaného atomu, jehož energie by však silně závisela na jeho poloze v prostoru díky souřadnici y vyskytující se v operátoru kinetické energie. Důvodem je, že ve směru \hat{y} je narušena translační symetrie Hamiltoniánu. Ta však není narušena ve směru \hat{x} a vlastní funkce jako funkce x budou tedy mít Blochův tvar daný součinem rovinné vlny $\exp(ik_x x)$ a periodické funkce s periodou a ve směru \hat{x} . Pro každou řadu atomů ve směru \hat{x} definovanou polohou $m_y a$ můžeme nahradit vektorový potenciál $\vec{A} = (-By, 0, 0)$ potenciálem mající minimum právě v této poloze, $\vec{A} = (-B(y - m_y a), 0, 0)$. Problém vlastních hodnot je pak pro všechny řady atomů stejný a vede k dispersní relaci $E(k_x)$, která nezávisí na poloze $m_y a$. Použitou substitucí pro vektorový potenciál byl však změněn Hamiltonián. Aby k jeho změně nedošlo, je třeba nahradit operátor hybnosti p_x operátorem $p_x - eBm_y a$. Vzhledem k tomu, že se jedná pouze o konstantní posun, změní se vlastní hodnoty energie řady atomů $m_y a$ tak, že vlnové číslo k_x vstupující do dispersní relace $E(k_x)$ bude nahrazeno následující,

tzv. Peierlsovou substitucí

$$k_x \rightarrow k_x - \frac{eB}{\hbar} m_y a = k_x - 2\pi \frac{A_0}{2\pi l_B^2} \frac{m_y}{a} . \quad (90)$$

Tato substituce vede k očekávané závislosti vlastních energií na poloze atomových řad $m_y a$ pro pevně dané vlnové číslo k_x .

Jako nulové přiblížení můžeme opět použít lineární kombinaci atomových funkcí danou vztahem (83). Vzhledem k tomu, že translační symetrie díky zvolenému tvaru vektorového potenciálu \vec{A} není narušena ve směru \hat{x} , není narušena ani odpovídající periodicitu koeficientů rozvoje v indexu m_x , $C_{m_x \pm 1, m_y}(\vec{k}) = C_{m_x, m_y}(\vec{k}) \equiv C_{m_y}(\vec{k})$. Vlastní energie jsou pak opět dány řešením soustavy rovnic (85) s tím, že pro k_x je použito substituce (90). Soustava rovnic (83) tedy dostane následující formu

$$C_{m_y}(\vec{k}) \left[E_n - 2t \cos \left(k_x a - 2\pi \frac{A_0}{2\pi l_B^2} m_y \right) - E \right] + \\ - C_{m_y-1}(\vec{k}) t e^{-ik_y a} - C_{m_y+1}(\vec{k}) t e^{ik_y a} = 0 . \quad (91)$$

Periodické okrajové podmínky na vlnové funkce ve směru \hat{y} lze aplikovat pouze tehdy, když poměr $A_0/(2\pi l_B^2)$ vstupující do argumentu kosinu, bude nabývat racionálních hodnot, tedy když

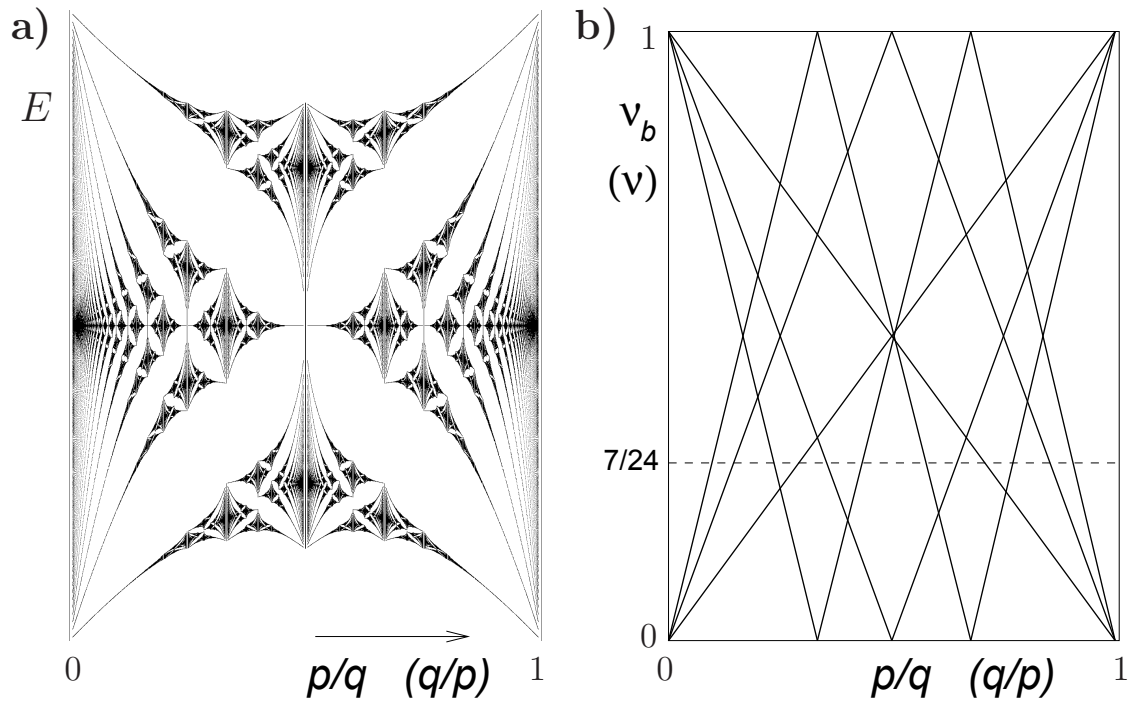
$$\frac{A_0}{2\pi l_B^2} = \frac{A_0 B}{\frac{h}{e}} = \frac{p}{q} , \quad (92)$$

kde p a q jsou celá čísla. Tato podmínka znamená, že plochou qA_0 prochází p kvant magnetického toku. V takovém případě, tzv. racionálních magnetických polí, se soustava rovnic redukuje na soustavu q rovnic s následující okrajovou podmínkou pro koeficienty rozvoje

$$C_{m_y+q}(\vec{k}) = C_{m_y}(\vec{k}) . \quad (93)$$

Vlastní funkce budou mít ve směru \hat{y} také Blochův tvar, ale s periodou qa . Pro dané vlnové číslo \vec{k} má pak soustava obecně q řešení a těsnovazební pás se rozpadne na q podpásů, které mohou, ale nemusí být odděleny energetickými mezerami. Na Obr. 21a je znázorněno energetické spektrum v závislosti na poměru p/q vypočtené za předpokladu, že překryvové integrály nezávisí na magnetickém poli. Díky tvaru se o něm často mluví jako o "Hofstadter butterfly" [23].

V blízkosti spodní hrany pásu a pro relativně slabá magnetická pole, $p/q \ll 1$, lze ve spektru snadno identifikovat Landauovy hladiny, jejichž energie roste lineárně s polem, $B \sim p/q$. Energetické spektrum vykazuje elektronovou-děrovou symetrii kolem středu energetického spektra. U horní hrany pásu jsou identifikovatelné děrové Landauovy hladiny. Z tvaru soustavy rovnic (91), vyplývá, svým způsobem překvapivá skutečnost, že energetická struktura těsnovazebního pásu je v závislosti na magnetickém poli periodická, s periodou $\Delta(p/q) = 1$, pokud by překryvový integrál nezávisel na magnetickém poli. To však efektivně zužuje potenciálovou jámu reprezentující potenciál atomu. Důsledkem je snižování



Obrázek 21: a) Vlastní hodnoty energie pro jeden těsnovazební pás (rozšířenou Landauovu hladinu) v závislosti na poměru $p/q \sim B$ ($q/p \sim 1/B$). b) Závislost plnicího faktoru ν_b těsnovazebního pásu (plnicího faktoru Landauovy hladiny ν) pro hodnoty energie ležící v energetických mezerách v závislosti na p/q (q/p) pro omezený rozsah hodnot s a σ ($|s|, |\sigma| \leq 3$).

hodnot překryvových integrálů t vedoucí k zužování šířky energetických pásů s rostoucím magnetickým polem. Vnitřní struktura energetického spektra tím však není narušena.

V případě, kdy v přiblížení silně vázaných elektronů nedochází k překryvu pásů, je vhodné pro daný pás dovolených energií zavést plnicí faktor $\nu_b = A_0 n(E)$, který v závislosti na energii nabývá hodnot mezi nulou a jedničkou, nebereme-li v úvahu spinovou degeneraci. Je to počet stavů připadající na elementární celu A_0 , který je v případě zaplněného pásu roven jedné, $\nu_b \rightarrow 1$. Vztah (82) pak můžeme s využitím definice racionálních magnetických polí (92) zapsat v následujícím tvaru

$$A_0 n(E_F) \equiv \nu_b = s + \sigma \frac{A_0}{2\pi l_B^2} = s + \sigma \frac{p}{q}. \quad (94)$$

Pro daný poměr p/q má tato rovnice mnoho řešení. Pro popisovaný model silně vázaných elektronů lze dokázat, že fyzikální smysl dávají řešení splňující podmínku $|\sigma| < q/2$, a pás zakázaných energií se objeví, když tato podmínka určuje hodnotu σ jednoznačně. Lze předpokládat, že pokud pásy zakázaných energií vzniknou, budou nejširší v případech, kdy s i σ budou malá celá čísla. Očekávané polohy energetických mezer pro $|s|, |\sigma| \leq 3$,

v závislosti na $p/q \sim B$, jsou na Obr. 21b a lze je snadno identifikovat s polohami mezer ve vypočteném spektru na Obr. 21a.

Celá čísla s a σ vyhovující rovnici (94) reprezentují kvantové hodnoty měřitelných veličin, pokud se Fermiho energie nachází v pásu zakázaných energií. V následujícím výkladu ukážeme, že σ definuje hodnoty kvantového Hallova odporu. Předpokládejme, že vzorek má tvar pásku o konečné šířce ve směru \hat{y} . Na jeho hranách vzniknou v oblastech zakázaných energií hranové stavy, které mohou umožnit vznik hranových demagnetizačních proudů. Příspěvek k magnetizaci M_z , magnetickému momentu na jednotku plochy, od stavů v okolí Fermiho energie z intervalu $\Delta\mu$. je dán následujícím vztahem:

$$\Delta M_z \equiv \left(\frac{\partial M_z}{\partial \mu} \right)_{A, A_0, B} \Delta\mu = - J_x^{(\text{hran})}, \quad (95)$$

kde $J_x^{(\text{hran})}$ je proud tekoucí podél pravé hrany vzorku v energetickém intervalu $\Delta\mu$. Vzhledem k předpokladu, že se interval $\Delta\mu$ nachází v oblasti, kde mohou existovat pouze hranové stavy, reprezentuje ΔM_z změnu celkového momentu, který splňuje termodynamické Maxwellovy relace. Využitím definice σ , vztahu (77), dostaneme

$$\left(\frac{\partial M_z}{\partial \mu} \right)_{A, A_0, B} = \left(\frac{\partial n(E_F)}{\partial B} \right)_{A, A_0, \mu} = \frac{\sigma}{2\pi l_B^2 B} = \frac{e}{h} \sigma. \quad (96)$$

Pokud vyvoláme rozdíl chemických potenciálů $\Delta\mu$ mezi protilehlými hranami, bude celkový proud právě roven hranovému proudu a Hallův odpor bude nabývat kvantových hodnot

$$R_H^{(Q)} \equiv \frac{\Delta\mu}{e J_x^{(\text{hran})}} = - \frac{1}{e \left(\frac{\partial n(E_F)}{\partial B} \right)_{A, A_0, \mu}} = - \frac{h}{e^2} \frac{1}{\sigma}. \quad (97)$$

Pokud je spektrum tvořeno Landauovými hladinami a E_F leží v pásu zakázaných energií, je $n(E_F) = ieB/h$ a σ je právě rovno i . V takovém případě dostaneme kvantové hodnoty celočíselného Hallova odporu, v souladu s odvozením popsáním v předcházející sekci.

Jako příklad, co lze očekávat s růstem magnetického pole pro Blochovské elektrony, předpokládejme, že dvojrozměrný krystal, který lze popsat v přiblížení silně vázaných elektronů, má koncentraci elektronů odpovídající faktoru plnění $\nu_b = 7/24$, viz Obr. 21b. S růstem magnetického pole, tedy s růstem poměru p/q , se nejprve objeví kvantový Hallův jev s hodnotami odpovídajícími Landauovým hladinám. Budeme-li uvažovat pouze hodnoty $|\sigma| \leq 3$ objeví se nejprve prodleva odpovídající hodnotě $\sigma = 3$, pak prodleva s hodnotou $\sigma = 2$. S dalším růstem pole se však nejprve objeví prodleva s hodnotou $\sigma = -3$, Hallův odpor změní znaménko, a teprve s dalším růstem pole dosáhneme očekávané hodnoty $\sigma = 1$. Na rozdíl od standardně pozorovaných závislostí, teorie předpovídá, že vlivem periodického potenciálu nemusí Hallův odpor růst s rostoucím magnetickým polem.

Reálné krystaly mají mřížkovou konstantu obvykle menší, než jeden nanometr. K tomu aby poměr p/q dosáhl hodnoty 1, bylo by třeba aplikovat magnetické pole větší než 10^3 T, což jsou hodnoty v současné době nedosažitelné.

Jednou z cest jak ověřit popsanou předpověď je využít umělých krystalů, vytvořených na bázi polovodičových struktur. Mřížková konstanta takového krystalu může být dostatečně velká, aby v dostupných magnetických polích bylo snadno dosaženo hodnot $p/q \sim 1$. Problémem je však požadavek téměř dokonalé periodičnosti a zachování interference na vzdálenostech mnohem větších než je mřížková konstanta. Jinými slovy, koherentní délka λ_ϕ musí být mnohem větší, než mřížková konstanta a . Takové systémy se již podařilo připravit, ale jejich elektronovou strukturu nelze popsat v přiblížení silně vázaných elektronů. Jde o systémy, kde "krystalový" potenciál lze spíše považovat za periodickou potenciálovou modulaci. Pokud je její amplituda mnohem menší než energie magnetického kvantování $\hbar\omega_c$ daná cyklotronovou frekvencí ω_c , lze periodickou modulaci potenciálu považovat za slabou poruchu. V takovém případě dojde k rozšíření Landauových hladin na nepřekrývající se energetické pásy. Ukazuje se, že z matematického hlediska je problém vlastních hodnot pro tento případ ekvivalentní problému vlastních hodnot pro již popsaný případ silně vázaných elektronů. Z fyzikálního hlediska je to problém komplementární [24]. Zaplněnost Landauových hladin je dána jejich plnicím faktorem $\nu = n(E_F) 2\pi l_B^2$, kde $n(E_F)$ má význam elektronové koncentrace v dané Landauově hladině. Obecně platnou nutnou podmínku (82) pro existenci energetické mezery je tedy vhodné přepsat do následujícího tvaru

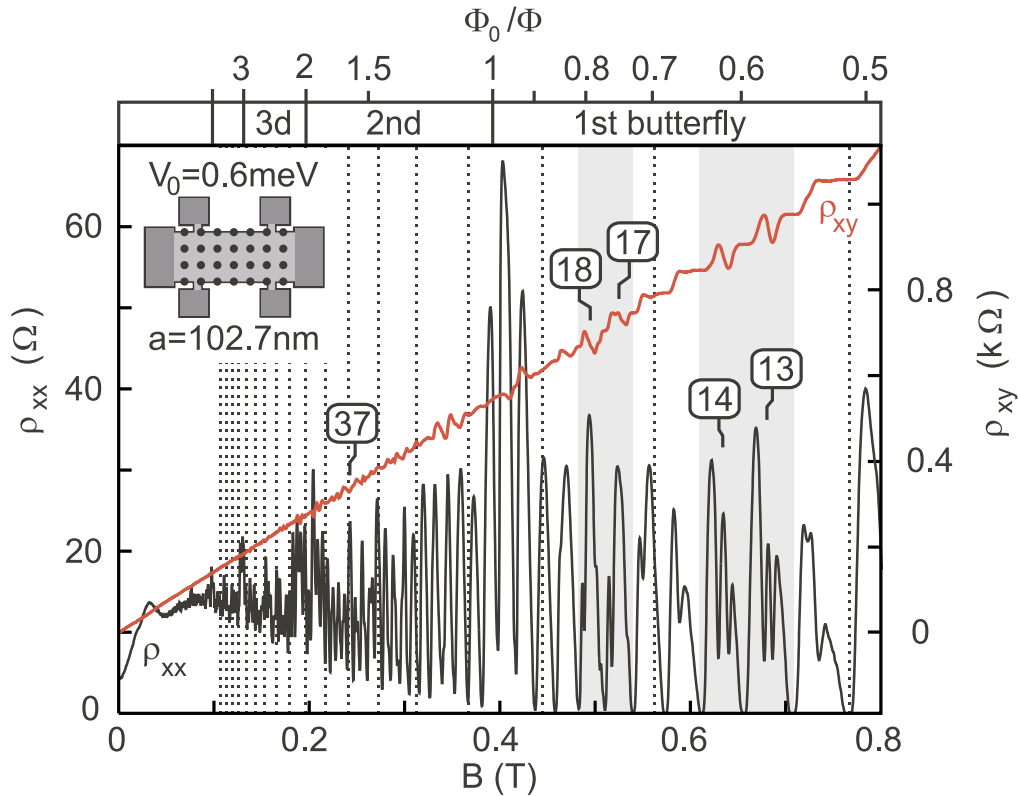
$$2\pi l_B^2 n(E_F) \equiv \nu = \sigma + s \frac{2\pi l_B^2}{A_0} = \sigma + s \frac{q}{p}. \quad (98)$$

Pro tento limitní případ slabé periodické modulace lze dokázat, že fyzikální smysl dávají řešení splňující podmínku $|s| < p/2$, a pás zakázaných energií se objeví, když tato podmínka určuje hodnotu s jednoznačně. Šířka energetického pásu, rozšířené Landauovy hladiny, je závislá na velikosti magnetického pole. Pro čtvercovou mřížku má její vnitřní struktura v závislosti na $q/p \sim 1/B$ charakter daný také strukturou zvanou "Hofstadter butterfly", viz. Obr. 21a. Počet podpásů je však v tomto případě dán číslem p . Očekávané polohy energetických mezer pro $|s|, |\sigma| \leq 3$, v závislosti na $q/p \sim 1/B$, jsou na Obr. 21b.

Předpověď, že vliv periodického potenciálu naruší růst Hallova odporu s rostoucím magnetickým polem, byla na uměle vytvořených krystalech s mřížkovou konstantou cca 100 nm již experimentálně ověřena [25], viz. Obr. 22. Interpretace závislosti Hallova odporu však není jednoduchá, protože pro danou elektronovou koncentraci se v závislosti na poli mění jak plnicí faktor ν , tak i vnitřní struktura rozšířených Landauových hladin. Ve slabých magnetických polích není pozorován pokles podélného odporu ρ_{xx} s růstem pole B . Jedná se tedy o systém s výrazně potlačenými náhodnými fluktuacemi potenciálu a tedy i potlačenou elektronovou lokalizací. To je i důvod, proč v závislosti Hallova odporu na B byly výrazně redukovány prodlevy, typické pro kvantový Hallův jev ve standardních strukturách. Pozorovaný nárůst podélného odporu ρ_{xx} ve slabých polích následovaný poklesem je typickým projevem jevu, zvaného magnetický průraz.

Co se týče celého čísla s definovaného vztahem (76), lze ukázat, že je to statická elektronová polarizovatelnost jejíž hodnotu definuje. Na rozdíl od kvantových hodnot Hallova odporu, vztah (97), však konstanta úměrnosti svazující polarizovatelnost s číslem s není univerzální konstantou, ale je závislá na materiálových charakteristikách [26].

Uvedenou diskuzi pro dvojrozměrné systémy je možno zobecnit i na systémy trojroz-



Obrázek 22: Závislost podélného odporu ρ_{xx} a Hallova odporu ρ_{xy} na magnetickém poli naměřená na heterostruktuře AlGaAs/GaAs s periodickou modulací potenciálu ($a=102,7$ nm) za teploty 50 mK. Celá čísla odpovídají indexům rozšířených Landauových hladin.

měrné. Problém je však komplikovanější, protože musí být brána v úvahu i orientace magnetického pole vzhledem ke krystalografickým osám. Podmínky pro existenci energetické mezery jsou pak mnohem složitější a jejich řešení není tak jednoznačné jako pro popsané modely dvojrozměrných systémů.

Poznamenejme, že vztah (97) vyjadřující kvantové hodnoty Hallova odporu pomocí derivace integrální hustoty stavů podle magnetického pole je velmi obecný. Lze jej použít i pro případ zlomkového Hallova jevu, kdy však derivace vede ke zlomkovým hodnotám veličiny σ .

4 Tunelování elektronů

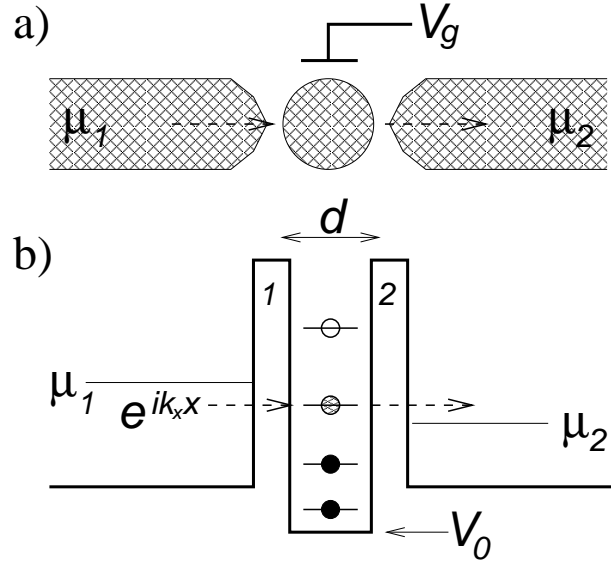
4.1 Rezonanční tunelování

Současné technologie umožňují vytvářet v polovodičových strukturách hluboké potenciálové jámy o rozměrech řádu několika desítek nanometrů. Ty mají diskrétní energetické spektrum a jejich obsazením vzniknou vlastně umělé atomy, tzv. kvantové tečky. Napojíme-li takový atom na proudové přívody tak, aby mezi přívody a atomem vznikly potenciálové bariéry, lze pomocí měření odporu studovat rozložení hladin. Překryv mezi vlnovými funkcemi elektronů v přívodech a "atomovými" funkcemi vede nejen k posunu hladin, ale i k jejich rozšíření. Omezíme se proto na případ malého překryvu, kdy pravděpodobnosti průchodu elektronu bariérami jsou mnohem menší než jedna, tedy když $G \ll e^2/h$. V takovém případě mluvíme o elektronovém tunelování. Hradlo v blízkosti umělého atomu umožňuje vložení napětí V_g měnit hloubku potenciálové jámy, tedy hodnotu potenciálového minima V_0 , a tak měnit i polohu hladin vzhledem k chemickému potenciálu v přívodech. Schéma takové struktury je znázorněno na Obr. 23. Je zřejmé, že pokud se v energetickém intervalu $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ nenachází žádná z hladin, bude pravděpodobnost průchodu elektronů nulová. Teprve když se v tomto intervalu hladina objeví, dojde k tunelování elektronů. Transmisní koeficient, který určuje konduktanci struktury bude tedy silně závislý na energii tunelujícího elektronu.

V případě, že se v intervalu $\Delta\mu$ nachází pouze jedna hladina, jedná se o tunelovací strukturu, která má jednorozměrný charakter. Transmisní koeficient $T(E)$ je pak dán již dříve odvozeným vztahem (26), který popisuje rozptyl na dvou potenciálových bariérách,

$$T(E) = \frac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2k_x d + \theta) + R_1 R_2}, \quad (99)$$

kde $T_1 = 1 - R_1$ a $T_2 = 1 - R_2$ jsou pravděpodobnosti průchodu potenciálovými bariérami označenými indexy 1 a 2, d označuje jejich vzdálenost a vlnové číslo k_x reprezentuje energii procházejícího elektronu. Pro uvažovaný případ elektronového tunelování se předpokládá že T_1 i T_2 jsou mnohem menší než 1. Využitím aproximace $\sqrt{R_1 R_2} \approx 1 - (T_1 + T_2)/2$ a



Obrázek 23: a) Schéma tunelovací struktury s umělým atomem kontrolovaným hradlovým napětím V_g . b) Potenciálový profil tunelovací struktury s vyznačenými hladinami umělého atomu.

rovnosti $\cos \phi = \cos^2 \phi/2 - \sin^2 \phi/2$ dostaneme

$$T(E) = \frac{T_1 T_2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2(\phi/2)} \approx \frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \frac{1}{1 + 16 \frac{\sin^2(\phi/2)}{(T_1 + T_2)^2}}, \quad (100)$$

kde $\phi \equiv 2k_x d + \theta$. Maximum tunelovací pravděpodobnosti dostaneme za podmínky rezonance, kdy $\phi = \phi_r$ je celistvým násobkem 2π . To odpovídá energii E právě rovné energii některé z "atomových" hladin E_n . Je-li $\delta\phi$ malou odchylkou od hodnoty ϕ_r odpovídající energetickému rozdílu $\delta E = E - E_n$, dostaneme

$$2 \sin(\delta\phi/2) \approx \delta\phi = \frac{\delta\phi}{\delta k_x} \frac{\delta k_x}{\delta E} (E - E_n) = \frac{2d}{\hbar v} (E - E_n), \quad (101)$$

kde $v = (\delta E / \delta k_x) / \hbar$ je střední hodnota rychlosti tunelujícího elektronu. V blízkosti rezonance má tedy transmisní koeficient v závislosti na energii Lorenzovský tvar

$$T(E) \approx \frac{T_{\max}}{1 + \left(\frac{E - E_n}{\Gamma}\right)^2} \quad ; \quad T_{\max} \equiv \frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2}, \quad (102)$$

s pološířkou Γ ,

$$\Gamma \equiv \frac{\hbar v}{4d} (T_1 + T_2) \quad ; \quad \tau \equiv \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (103)$$

Veličina Γ reprezentuje i pološířku energetického stavu mezi potenciálovými bariérami, kde je elektron zachycen po dobu τ . Jedná se o dobu prodlení, tzv. "dwell time", která reprezentuje lokalizaci elektronu. S klesajícími hodnotami pravděpodobností T_1 a T_2 se doba prodlení prodlužuje. V případě $T_1 = T_2 = 0$ je pak elektron plně lokalizován v "atomu" ve stavu s přesně definovanou energií E_n .

Rozdíl napětí $U = \Delta\mu/e$ vyvolá tunelovací proud J daný transmisním koeficientem $T(E)$. Vezmeme-li v úvahu spinovou degeneraci hladin, dostaneme

$$J = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_0(E, \mu_1) - f_0(E, \mu_2)] T(E) dE, \quad (104)$$

kde $f_0(E, \mu)$ je Fermi-Diracova rozdělovací funkce. V limitě $eU \equiv \Delta\mu \ll \Gamma$ platí Ohmův zákon

$$J \rightarrow \frac{2e^2}{h} U \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{df_0(E, \mu)}{dE} \right) T(E) dE \rightarrow \frac{2e^2}{h} T(\mu) U, \quad (105)$$

přičemž pravý výraz odpovídá limitě nulové teploty. V závislosti na napětí V_g vloženém na hradlo, které způsobuje posun "atomových" hladin, procházejí energetickým intervalem $\Delta\mu$ jednotlivé hladiny, a konduktance $G = J/U$ vykazuje řadu rezonancí daných závislostí transmisního koeficientu na energii.

Pokud je rozdíl chemických potenciálů $\Delta\mu$ srovnatelný s šířkou hladiny Γ , Ohmův zákon přestane platit. Za podmínky, že rozšířená hladina bude zcela ležet v intervalu $\Delta\mu$, dosáhne

tunelovací proud maximální hodnoty J_{\max} nezávislé na aplikovaném napětí U . Dosazením výrazu (102) pro transmisní koeficient do vztahu (104) dostaneme

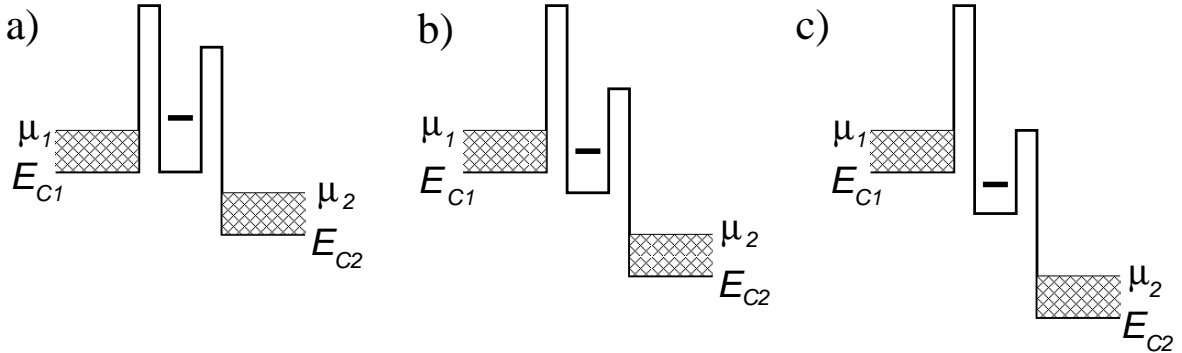
$$J_{\max} \rightarrow \frac{2e}{h} \pi \Gamma T_{\max}, \quad (106)$$

pokud však $\Delta\mu$ nebude tak velké, aby k tunelovacímu proudu přispívalo více hladin.

Popsaný postup lze zobecnit i na vícerozměrné systémy, například na tunelování elektronů vrstevnatými strukturami. Uvažujme polovodič n-typu s kvadratickým disperzním zákonem $E(\vec{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m^*$. Nechť se uvnitř něho nachází dvojrozměrný elektronový plyn orientovaný paralelně s rovinou $y-z$, oddělený od polovodičového prostředí potenciálovými bariérami. Ve směru \hat{x} má pak energetické schéma stejný průběh jako v jednorozměrném případě znázorněném na Obr. 23b. V analogii se vztahem (104) dostaneme pro proudovou hustotu ve směru \hat{x}

$$j_x = 2e \int_0^{+\infty} \frac{\hbar k_x}{m^*} T(k_x) \left[f_0(E_{C1} + E(\vec{k}), \mu_1) - f_0(E_{C2} + E(\vec{k}), \mu_2) \right] \frac{d\vec{k}}{2\pi^3}, \quad (107)$$

kde $T(k_x)$ je transmisní koeficient, E_{C1} a E_{C2} označují energie hran vodivostních pásů polovodičů, které slouží jako proudové přírůdky.



Obrázek 24: Schematické znázornění posunu energie vázaného modu, lokalizovaného mezi bariérami (vodorovná silná čárka), s růstem napětí $U = (\mu_1 - \mu_2)/e$.

Jako příklad bude popsána tunelovací struktura vykazující silně nelineární voltampérovou charakteristiku. Předpokládejme, že tunelovací bariéry vymezují velmi úzkou potenciálovou jámu, pro kterou leží energie nejnižšího transversálního modu ve směru \hat{x} nad Fermiho mezí. S rostoucí velikostí aplikovaného napětí $U = \Delta\mu/e$ vzrůstá i energetický rozdíl mezi hranami vodivostních pásů vlevo a vpravo od tunelovací struktury, $\Delta\mu \equiv E_{C1} - E_{C2}$, jak je znázorněno na Obr. 24. To vede i k posunu energie transversálního modu. Pro zjednodušení předpokládejme, že s růstem $\Delta\mu$ se chemický potenciál μ_2 dostane pod úroveň hrany vodivostního pásu E_{C1} dříve, než klesne energie transversálního modu pod μ_1 , jak

je znázorněno na Obr. 24a. Pro nulovou teplotu lze v takovém případě obecný vztah (107) upravit do následujícího tvaru

$$j_x = \frac{e}{h} \int_{E_{C1}}^{\mu_1} \frac{2m^*}{h\hbar} (\mu_1 - E) T(E) dE, \quad (108)$$

kde $T(E) \equiv T(k_x)$ je dán řešením popsaného jednorozměrného problému a $2m^*/h\hbar$ je dvojrozměrná hustota stavů. Nenulový tunelovací proud bude pozorován tehdy, když se rezonanční hladina dostane do oblasti mezi energiemi E_{C1} a μ_1 , jak je znázorněno na Obr. 24b. Pokud se v této oblasti nachází pouze jedna hladina má transmisní koeficient Lorenzovskou závislost na energii danou vztahem (102) s maximem pro energii danou polohou rezonanční hladiny E_r . Za předpokladu, že $\Gamma \ll \mu_1 - E_{C1}$, dostaneme v analogii se vztahem (106)

$$j_x = \frac{e}{h} \pi \Gamma T_{\max} \frac{2m^*}{h\hbar} (\mu_1 - E_r) \quad , \quad E_r \in (\mu_1, E_{C1}), \quad (109)$$

ve kterém $2m^*(\mu_1 - E_r)/(h\hbar)$ je plošná koncentrace elektronů mezi bariery. Výsledná volt-ampérová charakteristika má pak charakteristický průběh daný posunem rezonanční hladiny přes energetický interval (μ_1, E_{C1}) , který je úměrný aplikovanému napětí U . Lineární nárůst proudu s napětím je nakonec následován výrazným poklesem, který odpovídá situaci kdy rezonanční hladina klesne pod úroveň dna vodivostního pásu levého přívodu, tedy pod E_{C1} , jak je znázorněno na Obr. 24c.

4.2 Coulombická blokáda

Popsané rezonanční tunelování nebralo v úvahu existenci náboje elektronu. Ukazuje se, že právě díky coulombické interakci může podobné vlastnosti vykazovat i tunelování "umělými atomy" o velkém počtu elektronů, které jsou obvykle nazývány jako kovové či elektronové ostrůvky. Lze očekávat, že tunelování bude silně ovlivněno především tehdy, když doba prodlení elektronu v ostrůvku bude dostatečně dlouhá, aby jej bylo možno považovat za téměř lokalizovaný. Pak lze předpokládat, že elektronový náboj v ostrůvku bude s velkou pravděpodobností vždy dán celočíselným násobkem náboje elektronu.

Popis tunelovacího experimentu znázorněného na Obr. 23 je možno modifikovat následujícím způsobem. Volnou energii $F(N_e)$ ostrůvku s N_e elektrony můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$F(N_e) = U(N_e) + \sum_{i=1}^{N_e} E_i, \quad (110)$$

kde E_i jsou energie obsazených stavů v kvantové jámě vymezené ostrůvkem. Veličina $U(N_e)$, tzv. nabíjecí energie, reprezentuje energii vyvolanou coulombickou interakcí. Tu můžeme vyjádřit stejným způsobem jako energii nabíjeného kondenzátoru s kapacitou C ,

$$U(N_e) = \int_0^{-eN_e} \left[\frac{Q'}{C} + \phi_{\text{ext}} \right] dQ' = eN_e \left(\frac{eN_e}{2C} - \phi_{\text{ext}} \right), \quad (111)$$

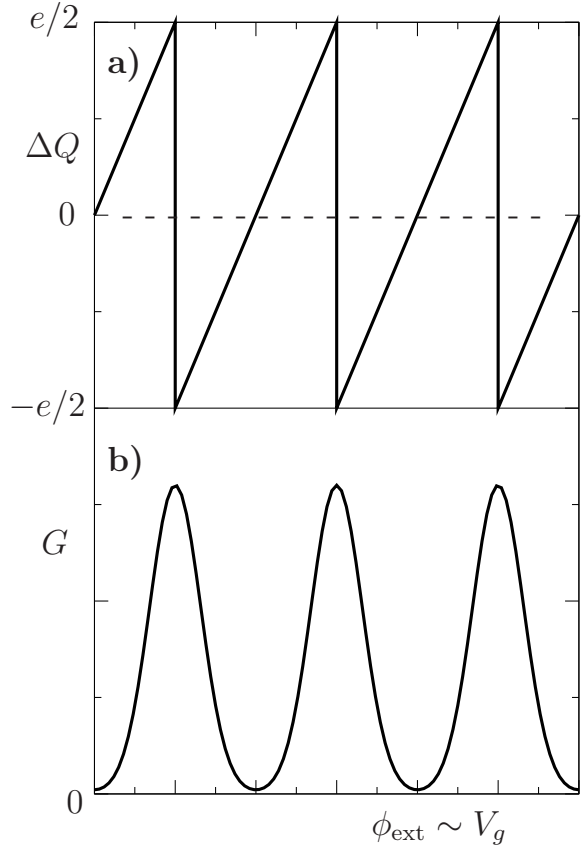
kde ϕ_{ext} je elektrostatický potenciál vyvolaný nábojem v okolí ostrůvku, který lze spojitě měnit napětím V_g vloženým na hradlo. O kapacitě C předpokládáme, že je konstantní alespoň v uvažovaném energetickém intervalu.

Absolutního minima coulombické energie by bylo dosaženo, pokud by nabíjecí energie daná vztahem (111) nabývala nulové hodnoty. To však není možno vždy splnit, protože předpokládáme, že uvnitř ostrůvku se může vyskytovat pouze náboj daný celistvým násobkem náboje elektronu $-e$. Odchylka náboje ΔQ v ostrůvku od ideální hodnoty odpovídající minimu coulombické energie má tedy v závislosti na spojitě se měnícím potenciálu ϕ_{ext} pilovitou závislost znázorněnou na Obr. 25a. Největší odchylky jsou dány poloviční hodnotou elektronového náboje $\pm e/2$. To odpovídá situaci kdy z energetického hlediska je pro systém stejně nevýhodné obsahuje-li ostrůvek o jeden elektron více, či nikoliv. Systém je z tohoto hlediska velmi nestabilní a lze očekávat, že i malé napětí $U = \Delta\mu/e$, aplikované na strukturu vyvolá elektrický proud. Pro odpovídající vnější potenciál $\phi_{\text{ext}} \sim V_g$ bude pak transmisní koeficient, a tedy i konduktance, nabývat maximálních hodnot, jak je znázorněno na Obr. 25b. V opačném případě, když $\Delta Q = 0$ nemá ostrůvek z energetického hlediska důvod se elektronu zbavit ani další přijmout, je průchod proudu blokván. Lokalizace elektronu v ostrůvku je tak coulombickou interakcí posílena. Lze očekávat, že v limitě malých napětí U bude konduktance G v závislosti na hradlovém napětí $V_g \sim \phi_{\text{ext}}$ vykazovat řadu píků, podobně jako v již popsaném případě rezonančního tunelování.

Pravděpodobnost výskytu N_e elektronů v ostrůvku je dána grand-kanonickou rozdělovací funkcí

$$P(N_e) = c_n e^{-\frac{F(N_e) - N_e \mu}{k_B T}}, \quad (112)$$

kde μ označuje chemický potenciál a c_n je normalizační konstanta. Polohy maxim tunelovacího proudu jsou dány podmínkou, že pravděpodobnost výskytu N_e elektronů v ostrůvku je stejná jako pravděpodobnost, že v ní bude o jeden elektron méně. Ze vztahu (112) pak

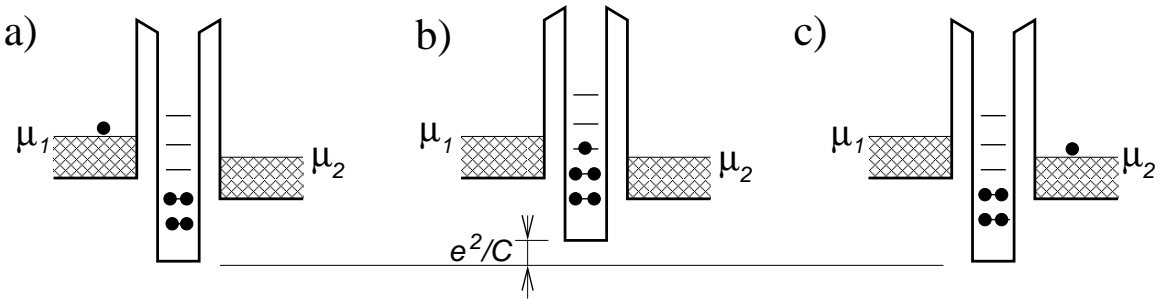


Obrázek 25: Závislost ΔQ (a) a konduktance G (b) na vnějším elektrostatickém potenciálu ϕ_{ext} elektronového ostrůvku, který je úměrný napětí na hradle V_g .

plyne

$$F(N_e) - F(N_e - 1) = \mu \quad \Rightarrow \quad E_{N_e}^* \equiv E_{N_e} + \left(N_e - \frac{1}{2}\right) \frac{e^2}{C} = \mu + e\phi_{\text{ext}}, \quad (113)$$

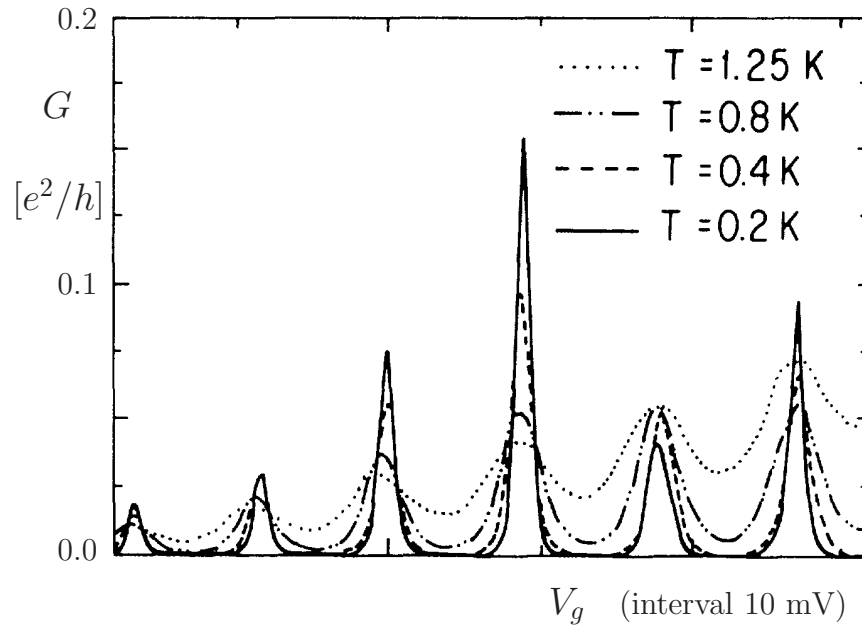
kde $E_{N_e}^*$ je energie hladiny v ostrůvku modifikovaná coulombickou energií při jejím obsazení elektronem. V limitě malých napětí U , konduktance v závislosti na externím potenciálu $\phi_{\text{ext}} \sim V_g$ tedy osciluje s periodou danou rozdílem energií neobsazených stavů, ΔE , navýšenou o nabíjecí energii e^2/C . Tunelovací proces je schematicky znázorněn na Obr. 26. Ačkoliv spinová degenerace umožňuje obsazení hladin dvěma elektrony, coulombická interakce neumožňuje průchod dvou elektronů současně. Elektrony tak mohou tunelovat ostrůvkem pouze postupně. Dokud elektron neuvolní v ostrůvku místo, je průchod dalšího zablokován.



Obrázek 26: Schéma tunelování elektronu ovlivněné coulombickou interakcí. Obsazení stavů v ostrůvku je znázorněno plnými kroužky. Při navýšení počtu elektronů v ostrůvku o jeden, dojde k posunu dna jámy o nabíjecí energii e^2/C , jak je znázorněno na schématu b).

Coulombická blokáda umožňuje pozorovat výrazné oscilace konduktance i při tunelování ostrůvky s relativně velkým počtem elektronů, ve kterých je rozdíl energetických hladin daný rozměrovým kvantováním srovnatelný s tepelnou energií $k_B T = 0,086 T[\text{K}] \text{ meV}$. Jako příklad uvedme výsledky získané na tunelovací struktuře připravené na bázi dvojrozměrného elektronového plynu v heterostruktuře GaAs/Al_xGa_{1-x}As [27], viz Obr. 27. Rozměry ostrůvku byly cca $0,1 \times 1,0 \mu\text{m}$, $e^2/C \sim 0,5 \text{ meV}$ a rozdíl energií hladin, $\Delta E \sim E_{i+1} - E_i$, daných rozměrovým kvantováním v ostrůvku, byl řádu $0,05 \text{ meV}$.

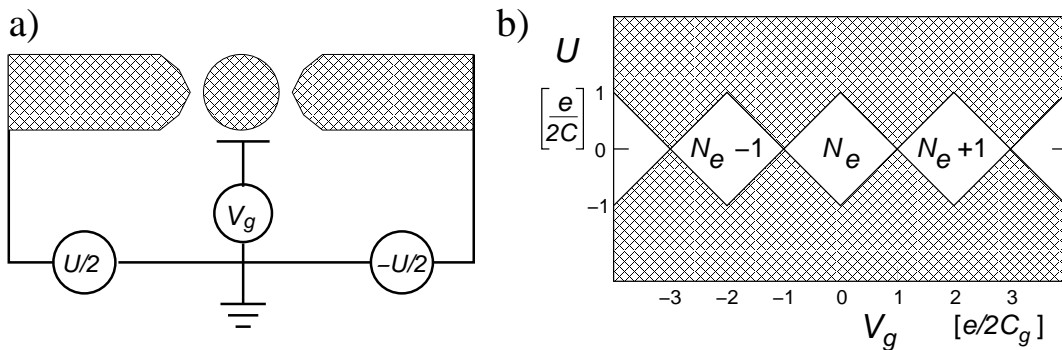
Podmínkou pro existenci coulombické blokády je, aby kapacita systému byla dostatečně malá. Pokud však zvýšíme aplikované napětí U nad kritickou hodnotu, $eU > \Delta E + e^2/C$, coulombická blokáda bude potlačena a oscilace vymizí. V případě, že $\Delta E \gg e^2/C$ má tunelování čistě rezonanční charakter.



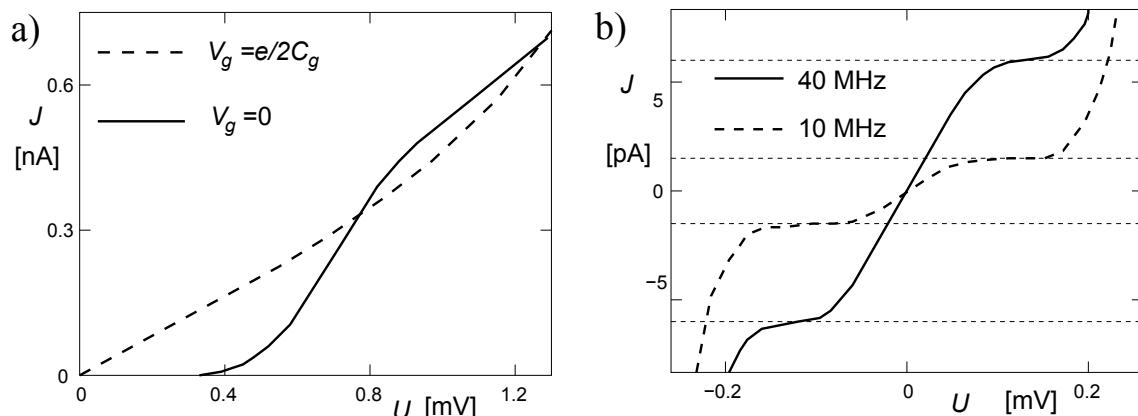
Obrázek 27: Závislost konduktance tunelovací struktury na hradlovém napětí V_g .

4.3 Jedno-elektronový tranzistor a turniket

Jevu coulombické blokády lze využít ke konstrukci elektronických součástek založených na tom, že elektrony tunelují postupně, pěkně jeden po druhém. Za zakladatele oboru je považován K. K. Licharev [28], moskevský elektro-inženýr. Základní součástí je jedno-elektronový tranzistor. V závislosti na aplikovaném napětí $U = (\mu_1 - \mu_2)/e$ a na hradlovém napětí V_g se ostrůvek dostává do režimu coulombické blokády, nebo do režimu nenulového tunelovacího proudu, jak je schematicky znázorněno na Obr. 28.



Obrázek 28: a) Schéma jedno-elektronového tranzistoru. b) Oblasti stability dané coulombickou blokádou. Šrafované jsou oblasti nenulové konduktance.



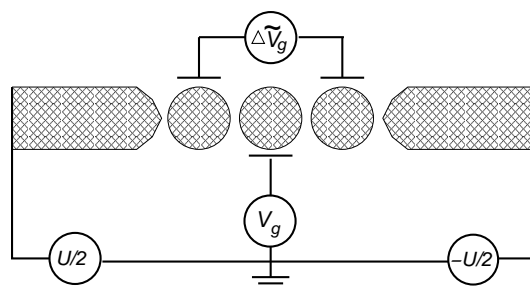
Obrázek 29: a) Volt-ampérové charakteristiky pro $V_g = 0$ zajišťující colombickou blokádu při nízkém napětí U a pro V_g , které režim blokády vylučuje. b) Volt-ampérové charakteristiky pro dvě frekvence střídavého napětí na hradle V_g .

Volt-ampérové charakteristiky tunelovací struktury závisí na velikosti V_g . Pro strukturu připravenou na bázi dvojrozměrného elektronového plynu v heterostruktuře AlGaAs/GaAs [29] jsou na Obr. 29a. Pro hradlové napětí $V_g = 0$ zajišťující colombickou blokádu pro malé hodnoty napětí U je voltampérová charakteristika silně nelineární.

V případě střídavého hradlového napětí o vhodné amplitudě a frekvenci f se ve volt-ampérových charakteristikách objevují prodlevy, viz Obr. 29b, odpovídající proudu daného frekvencí f

$$J = e f . \quad (114)$$

Pro tunelovací strukturu obsahující několik ostrůvků, viz Obr. 30, lze pak docílit pomocí fázového posuvu střídavých napětí na hradlech jednotlivých ostrůvků velmi přesného splnění výše uvedeného vztahu (114). Na takové součástce, elektronovém turniketě, lze dosáhnout při počítání procházejících elektronů přesnosti až 10^{-8} [30]. Ke konstrukci turniketů se obvykle využívá kovových materiálů, například hliníku s tunelovacími bariérami tvořenými jeho oxidem. Nenulový proud lze dostat i v případě nulového napětí U . Takový systém se pak obvykle nazývá elektronovou pumpou. Díky nenulovým kapacitám je však rozsah aplikovatelných frekvencí omezen shora a dosahované proudy jsou řádu pA. To je hlavní důvod, proč elektronových turniketů není stále využíváno v metrologii jako standardu elektrického proudu.



Obrázek 30: Schéma jednoelektronového turniketě.

4.4 Josephsonovy jevy

V souvislosti s tunelováním elektronů není možno opominout Josephsonovy jevy, které reprezentují kvantový charakter tunelování v supravodivých materiálech. Základem pro popis supravodivého stavu je mikroskopická teorie Bardeena-Coopera-Schrieffera. Její podstatou je, že fluktuační elektronového náboje vyvolávají polarizaci mřížky, která zpětně ovlivňuje rozložení elektronového náboje. To vede k přitažlivé síle mezi elektrony a vytvoření Cooperových párů. Ty jsou tvořeny dvěma elektrony s opačným momentem hybnosti a opačnou orientací spinu. V homogenním prostředí můžeme tento pár charakterizovat rovinnou vlnou $\exp(i\vec{k}\vec{r} + i\phi)$, kde ϕ reprezentuje na poloze nezávislou fázi. Vzhledem k tomu, že Cooperův pár má nulový spin, jedná se o částici, která se řídí Boseho-Einsteinovou statistikou. Ve stavu \vec{k} se tedy může nacházet více částic, neb nepodléhá Pauliho vylučovacímu principu. Zjednodušeně řečeno, Cooperovy páry vytvoří kondenzát, ve kterém budou mít všechny páry v základním stavu nulovou hybnost, $\vec{k} = 0$. Navíc budou mít stejnou fázi a jedná se tedy o koherentní stav souboru Cooperových párů. Odpovídající funkce reprezentující tento stav je dle Ginzburgovy-Landauovy teorie parametrem pořádku, a pro případ homogenního prostředí má tvar daný řešením časové Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = E \Psi \quad \Rightarrow \quad \Psi \equiv \sqrt{\rho} e^{i\phi} = \sqrt{\rho} e^{-i \frac{E}{\hbar} t}, \quad (115)$$

kde ρ je hustota Cooperových párů. Pokud není tento stav rozrušen excitacemi, vyvolanými například tepelnými fluktuacemi, vede systém elektrický proud bez energetických ztrát, odpor systému je nulový. Nejednodušující popis teorie i vlastností supravodičů je předmětem skript vydaných MFF [8].

Tunelování supravodivého proudu nevodivou mezerou lze popsat v analogii s Hamiltoniánem popisujícím tunelování elektronů potenciálovou bariérou. Za předpokladu, že mezi systémy vlevo a vpravo od tunelovacího přechodu existuje rozdíl potenciálů, stavy mají různou energii, dostaneme pro vlnové funkce supravodičů dvě svázané Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = E_1 \Psi_1 + K \Psi_2, \quad i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = E_2 \Psi_2 + K \Psi_1, \quad (116)$$

kde indexy 1, 2 označují stavy vlevo a vpravo od tunelovací mezery a K reprezentuje vazbu mezi nimi. Řešení soustavy rovnic lze hledat ve tvaru daném vztahem (115) s tím, že jak hustota ρ tak i fáze ϕ mohou být funkcemi času. Dosazením do rovnic dostaneme

$$\frac{i}{2} \frac{d\rho_1}{dt} - \rho_1 \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{E_1}{\hbar} \rho_1 + \frac{K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i(\phi_2 - \phi_1)}, \quad (117)$$

$$\frac{i}{2} \frac{d\rho_2}{dt} - \rho_2 \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{E_2}{\hbar} \rho_2 + \frac{K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{-i(\phi_2 - \phi_1)}.$$

Rovnost ryze imaginárních částí,

$$\frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{d\rho_1}{dt} = -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin(\Delta\phi), \quad \Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1, \quad (118)$$

odpovídá zákonu zachování hustoty, co odečte z levého vodiče, to se objeví ve vodiči pravém. Protože Cooperovy páry mají náboj $-2e$, je elektrický proud dán vztahem

$$J = \frac{4eK}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin(\Delta\phi) \equiv J_c \sin(\Delta\phi) , \quad (119)$$

kde materiálová konstanta J_c reprezentuje kritický proud. Aplikací většího proudu než kritického dojde k rozpadu supravodivého stavu. Skutečnost, že rozdíl fází mezi supravodivými stavy vyvolá stejnosměrný proud se označuje jako stejnosměrný Josephsonův jev.

Z rovnosti reálných částí soustavy rovnic pro stacionární případ, kdy se hustoty Cooperových párů s časem nemění, $\rho_1 = \rho_2$, dostaneme

$$\frac{d\Delta\phi}{dt} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar} \equiv \frac{2eU}{\hbar} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2eU}{\hbar} t + \phi_0 , \quad (120)$$

kde U je napěťový rozdíl mezi oběma supravodivými částmi. Dosazením do vztahu (119) dostaneme

$$J = J_c \sin\left(2\pi \frac{2eU}{h} t + \phi_0\right) . \quad (121)$$

Napěťový rozdíl vložený na tunelovací mezeru tedy vyvolá střídavý proud o Josephsonově frekvenci

$$f_J = \frac{2eU}{h} , \quad \frac{f_J}{U} = \frac{2e}{h} = 483\,597,9\,10^9 \text{ Hz V}^{-1} . \quad (122)$$

Jedná se o střídavý Josephsonův jev. Oba zmíněné jevy předpověděl Brian Josephson jako student Trinity College v Cambridge roku 1962 a v roce 1973 mu za ně byla udělena Nobelova cena.

K ověření Josephsonových jevů je nezbytné vyvolat napěťový rozdíl na přechodu mezi slabě vázanými supravodiči. Ukazuje se, že vhodným prostředkem je ozáření přechodu mikrovlnným zářením o frekvenci ω . Dodatečné oscilující napětí na přechodu o amplitudě u_o vyvolá dle vztahu (120) následující fázový rozdíl $\Delta\phi(t)$,

$$U(t) = U + u_o \cos(\omega t) \Rightarrow \Delta\phi(t) = \frac{2e}{\hbar} \left(Ut + \frac{u_o}{\omega} \sin(\omega t) + \phi_0 \right) . \quad (123)$$

Pro odpovídající proud dosazením do vztahu (119) dostaneme

$$J = J_c \sin\left[\frac{2e}{\hbar} (Ut + \phi_0)\right] \cos[a \sin(\omega t)] + \\ + J_c \cos\left[\frac{2e}{\hbar} (Ut + \phi_0)\right] \sin[a \sin(\omega t)] , \quad a \equiv \frac{2eu_o}{\hbar\omega} . \quad (124)$$

Nepříjemné anharmonické členy lze vyjádřit pomocí Fourierových řad

$$\cos[a \sin(\omega t)] = J_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} J_{2k}(a) \cos[2k\omega t] , \quad (125)$$

$$\sin[a \sin(\omega t)] = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} J_{2k-1}(a) \sin[(2k-1)\omega t] , \quad (126)$$

kde $J_n(a)$ jsou Besselovy funkce. Celkový proud je dán součtem členů, které mají pro sudé hodnoty $n = 2k$ následující tvar

$$2J_c J_{2k}(a) \sin \left[\frac{2e}{\hbar} (Ut + \phi_0) \right] \cos[2k\omega t] = 2J_c J_{2k}(a) \times \left\{ \sin \left[\left(\frac{2e}{\hbar} U + n\omega \right) t + \phi_0 \right] + \sin \left[\left(\frac{2e}{\hbar} U - n\omega \right) t + \phi_0 \right] \right\}. \quad (127)$$

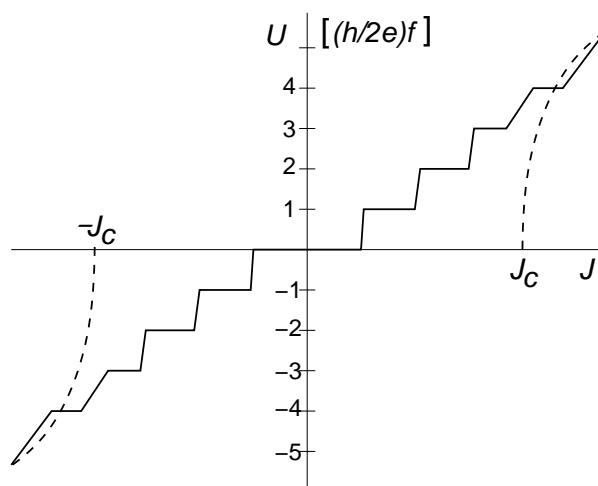
Podobný vztah dostaneme i pro lichá $n = 2k - 1$. Všechny členy oscilují s časem a dávají nulovou střední hodnotu proudu pokud není splněna následující podmínka

$$U = \pm n \frac{h}{2e} f, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (128)$$

Splňuje-li vnější napětí tuto podmínku, prochází tunelovacím přechodem stejnosměrný proud.

Platí i obrácené tvrzení, že stejnosměrný proud vyvolá při ozáření přechodu napětí dané celočíselným násobkem součinu univerzální konstanty $h/2e$ a frekvence dopadajícího záření f . To je situace realizovaná při experimentálním studiu volt-ampérových charakteristik [31]. Jejich typický průběh, nazývaný jako Shapiroovy schody, je na Obr. 31. Neozářeným přechodem prochází proud bez energetických ztrát pokud proud nepřekročí kritickou hodnotu J_c . Ozáření přechodu vyvolá energetické ztráty, Cooperovy páry absorbují a na přechodu emitují několik energetických kvant $\hbar\omega$. To vyvolá napěťové stupně s hodnotami napětí danými vztahem (128). V metrologii se využívá tisíců Josephsonových přechodů sériově zapojených k realizaci napěťových normálů, obvykle 1 V a 10 V.

Lze jich využít i ve výpočetní technice, přičemž dosahované operační rychlosti bývají 10x až 100x vyšší, než je tomu u standardních polovodičových prvků. Praktickému využití brání jejich velmi nízká pracovní teplota, cca 4 K.



Obrázek 31: Schématické znázornění typických volt-ampérových charakteristik ozářeného (plná čára) a neozářeného (čárkovaná čára) bodového tunelovacího přechodu.

5 Spinově polarizovaný transport

5.1 Základní vlastnosti elektronů se spinem

Schopnosti elektronů přenášet elektrický náboj využívá lidstvo již několik staletí. Širokého využití našla v komunikační, měřicí a výpočetní technice, tedy obecně v oboru zvaném elektronika. Ke konci minulého století se začalo využívat i vnitřního momentu elektronů, spinu. Začal se rychle rozvíjet nadějný technický obor, spinotronika.

Vlastnosti elektronů v elektromagnetickém poli jsou obecně dány řešením relativistické Diracovy rovnice. V limitě, kdy rychlost v s jakou se elektron pohybuje je mnohem menší než rychlost světla c , lze Diracovu rovnici aproximovat nerelativistickou Schrödingerovou rovnicí. Rozvoj, ve kterém jsou zanedbány členy vyššího řádu než v^2/c^2 vede ke korekcím Hamiltoniánu, do kterých vstupuje operátor vnitřního momentu elektronu, spinový operátor

$$\vec{S} \equiv \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad , \quad \vec{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) . \quad (129)$$

Složky vektorového operátoru $\vec{\sigma}$ jsou dány Pauliho maticemi

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (130)$$

které splňují antikomutační relace

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i \sigma_z . \quad (131)$$

Nejvýznamnější jsou dva korekční členy, které vedou ke kvalitativní změně vlastností jednočásticového Hamiltoniánu, a to H_Z vedoucí ke spinovému rozštěpení energetických hladin a H_{SO} popisující vazbu mezi spinem a orbitálním momentem

$$H_Z = \frac{e\hbar}{2m_0} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad ; \quad H_{SO} = \frac{\hbar}{4m_0^2 c^2} \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot (\vec{p} + e\vec{A}) \times \vec{\sigma} , \quad (132)$$

kde vektorový potenciál \vec{A} definuje magnetické pole $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ a $V(\vec{r})$ je potenciál, ve kterém se elektron pohybuje. Řešení Schrödingerovy rovnice

$$[H_0 \sigma_0 + H_Z + H_{SO}] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (133)$$

$$H_0 = \frac{1}{2m_0} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + V(\vec{r}) \quad ; \quad \sigma_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

má pak dvojsložkovou formu

$$\Psi^{(s)}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(s)}(\vec{r}) \\ \Psi_2^{(s)}(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad ; \quad s = \pm 1 \quad (134)$$

kde s lze chápat jako spinové kvantové číslo.

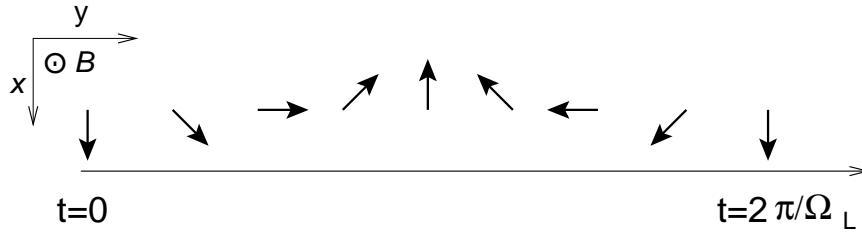
V případě, že se elektrony pohybují v homogenním prostředí, $V(\vec{r}) = 0$, je jedinou korekcí k Hamiltoniánu člen H_Z . Ten reprezentuje tendenci elektronu orientovat spin ve směru vnějšího magnetického pole \vec{B} . Pokud je aplikováno ve směru \hat{z} , Hamiltonián komutuje se složkou spinového operátoru, $\hbar\sigma_z/2$. Oba operátory jsou tedy diagonální ve stejné reprezentaci, vlastní hodnoty operátoru σ_z jsou $s = \pm 1$ a pro vlastní energie $E_n^{(s)}(k_z)$ dostaneme

$$E_n^{(s)}(k_z) = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + \varepsilon_z s_z \quad , \quad s_z \equiv \frac{s}{2} = \pm \frac{1}{2} . \quad (135)$$

Energie spinového rozštěpení ε_z (Zeemanovo rozštěpení) je závislá na prostředí, ve kterém se elektron vyskytuje. Obvykle se vyjadřuje v následujícím tvaru

$$\varepsilon_z \equiv \hbar\Omega_L = g \mu_B B \quad , \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0} , \quad (136)$$

kde $\mu_B = e\hbar/2m_0$ je Bohrov magneton a g je materiálově závislým faktorem spektroskopického rozštěpení (Landéův faktor), který pro volné elektrony nabývá hodnoty 2,0023.



Obrázek 32: Schéma spinové precese v rovině $x - y$ vyvolané magnetickým polem aplikovaným ve směru \hat{z} .

Larmorova frekvence Ω_L definovaná energií spinového rozštěpení hladin úzce souvisí s precesí spinu. Řešení časové Schrödingerovy rovnice pro homogenní systémy

$$(H_0\sigma_0 + H_Z) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{d\Psi(\vec{r}, t)}{dt} , \quad (137)$$

je dáno součinem funkce na spinu nezávislém a spinové části, která je dána vlastními funkcemi operátoru σ_z

$$\chi_z^{(s)}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s \\ 1 - s \end{pmatrix} e^{-is\frac{\Omega_L}{2}t} \quad , \quad s = \pm 1 . \quad (138)$$

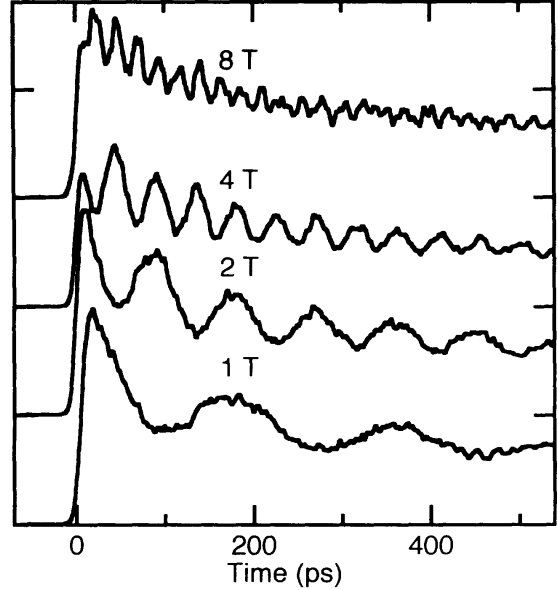
Představme si, že do uvažovaného systému vložíme v čase $t = 0$ elektron s orientací spinu ve směru osy x , tedy stavu, který není vlastním stavem Hamiltoniánu. Lze jej však vyjádřit pomocí lineární kombinace vlastních stavů operátoru σ_z

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_z^{(+1)}(t=0) + \chi_z^{(-1)}(t=0)] . \quad (139)$$

S rostoucím časem pak střední hodnoty spinu ve směru \hat{x} a \hat{y} oscilují s frekvencí Ω_L

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle + i \langle \sigma_y \rangle &= \frac{1}{2} [\chi_z^{(+1)}(t) + \chi_z^{(-1)}(t)]^+ (\sigma_x + i \sigma_y) [\chi_z^{(+1)}(t) + \chi_z^{(-1)}(t)] = \\ &= \cos(\Omega_L t) + i \sin(\Omega_L t). \end{aligned} \quad (140)$$

Precese spinu byla ověřena měřením spinové polarizace v polovodičových materiálech, využitím metod založených na absorpci a detekci polarizovaného záření. Precese reprezentuje spinově koherentní vlnu, která dosahuje životnosti stovek pikosekund dokonce i při pokojových teplotách. Na Obr. 33 jsou časové závislosti střední hodnoty spinu ve vybraném směru naměřené na kvantových jamách GaAs [32]. Konečná střední doba precese je dána interakcí elektronového spinu s magnetickými momenty, jadernými spiny a díky vazbě mezi spinem a orbitálním momentem s potenciálovými fluktuacemi. Obecně lze však konstatovat, že interakcí, které ovlivňují spin elektronu je podstatně méně, než interakcí vedoucích ke změně elektronové hybnosti. Na rozdíl od fázové koherence hybnosti, obvykle charakterizované koherentní délkou λ_ϕ , je koherence spinového momentu zachovávána po mnohem delší dobu. Tato skutečnost vede k pokusům využít spinově koherentních vln ve výpočetní technice (quantum computation).

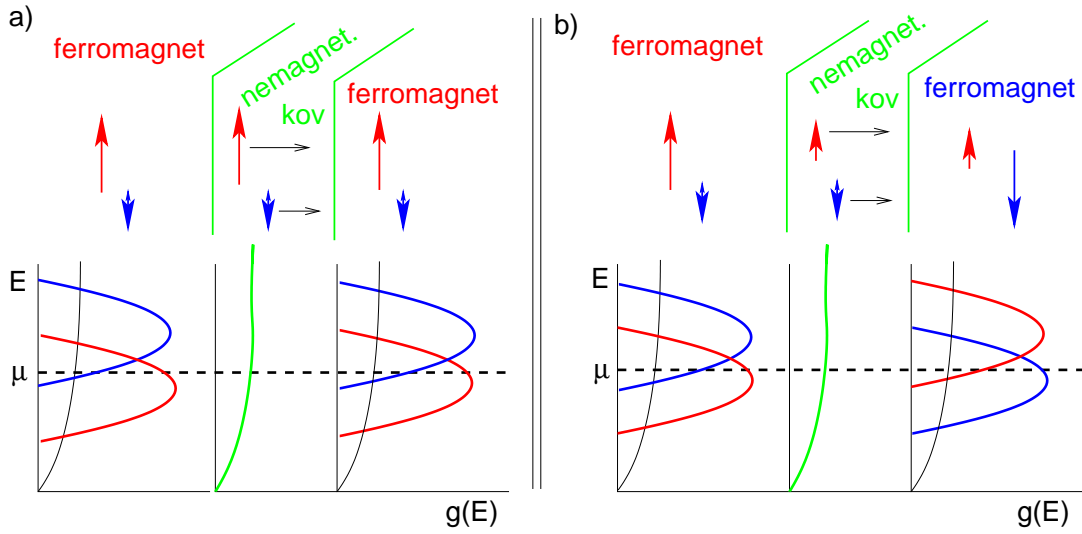


Obrázek 33: Časová závislost střední hodnoty spinu ve směru kolmém na magnetická pole B různé intenzity v GaAs při teplotě 10 K.

5.2 Spinově závislé transportní vlastnosti ferromagnetických struktur

Ke spinovému rozštěpení hladin dochází také ve ferromagnetických materiálech, ve kterých vzájemná interakce elektronů, výměnná interakce, vede ke spontánní magnetizaci, tedy existenci vnitřního magnetického pole. Důsledkem je, že koncentrace elektronů se spinem $s_z = -1/2$ a $s_z = +1/2$ jsou různé. Mluvíme pak o majoritním a minoritním spinu.

Nejjednodušším systémem, na kterém je možno pozorovat vliv spinu na konduktanci, je vrstva normálního, nemagnetického, kovu vložená mezi ferromagnetické materiály, které tvoří proudové přívody, elektrické kontakty. Jak je schematicky znázorněno na Obr. 34, jsou možná dvě principiálně odlišná uspořádání vzhledem k orientaci magnetických momentů ferromagnetických kontaktů, paralelní a antiparalelní. Lze předpokládat, že pravdě-



Obrázek 34: Schéma paralelního (a) a antiparalelního (b) uspořádání pro měření spinově závislé konduktance, $g(E)$ označuje hustotu stavů.

podobnost změny orientace spinu elektronu během jeho průchodu normálním kovem bude zanedbatelná. Konduktanci takového systému v limitním případě nulové teploty lze zapsat v následujícím obecném tvaru

$$G = \frac{e^2}{h} \sum_{s_z} \sum_{\vec{k}_1, n_1} \sum_{\vec{k}_2, n_2} |t(s_z, \vec{k}_1, n_1; s_z, \vec{k}_2, n_2)|^2 \times \delta(\mu - E_{s_z, n_1}(\vec{k}_1)) \delta(\mu - E_{s_z, n_2}(\vec{k}_2)) , \quad (141)$$

kde n čísluje energetické pásy a indexy 1, 2 označují jedná-li se o stavy v levém nebo pravém ferromagnetickém kontaktu. Na rozdíl od doposud uváděných výrazů pro konduktanci popisují transmisní amplitudy $t(s_z, \vec{k}_1, n_1; s_z, \vec{k}_2, n_2)$ přechody mezi stavy v kontaktech, které mohou mít rozdílnou energetickou strukturu. Zahrnují i rozptyl na přechodech mezi normálním kovem a ferromagnetickým materiálem. Za předpokladu, že normální kov je dostatečně neuspořádaný, případně jsou neuspořádaná rozhraní s ferromagnetickými kontakty, zapomene elektron na svůj původní stav v levém přívodu dřív, než se dostane do přívodu pravého. V takovém případě můžeme pravděpodobnost transmise rozdělit na součin dvou nezávislých amplitud

$$|t(s_z, \vec{k}_1, n_1; s_z, \vec{k}_2, n_2)|^2 \approx |t(s_z, \vec{k}_1, n_1)| |t(s_z, \vec{k}_2, n_2)| . \quad (142)$$

Tato aproximace umožňuje provést ve vztahu (141) součty přes stavy \vec{k} a n v levém a pravém přívodu nezávisle na sobě. Konduktanci pak můžeme vyjádřit v následujícím tvaru

$$G = \frac{e^2}{h} \sum_{s_z} t_{s_z}^{(1)} g_{s_z}^{(1)} t_{s_z}^{(2)} g_{s_z}^{(2)} , \quad (143)$$

kde $g_{s_z}^{(1,2)}$ je hustota stavů na Fermiho energii se spinem s_z v levém nebo pravém přívodu a $t_{s_z}^{(1,2)}$ je průměrná transmisní amplituda definovaná vztahem

$$t_{s_z} g_{s_z} \equiv \sum_{\vec{k}, n} |t(s_z, \vec{k}, n)| \delta(\mu - E_{s_z, n}(\vec{k})) . \quad (144)$$

Druhou mocninu této amplitudy lze chápat jako pravděpodobnost, že elektron mající energii μ ve ferromagnetickém kontaktu, překoná rozhraní s normálním kovem a dostane se zhruba doprostřed normálního kovu. Uvedené přiblížení potlačuje možný vliv interference na konduktanci.

Při paralelním uspořádání, kdy jsou magnetické momenty kontaktů orientovány paralelně, mají v obou kontaktech majoritní elektronové spiny stejnou orientaci. Stejně tvrzení platí i pro minoritní spiny a pro konduktanci dostaneme

$$G_{\uparrow\uparrow} = \frac{e^2}{h} \left(t_a^{(1)} g_a^{(1)} t_a^{(2)} g_a^{(2)} + t_i^{(1)} g_i^{(1)} t_i^{(2)} g_i^{(2)} \right) , \quad (145)$$

kde dolní indexy a, i označují jedná-li se o majoritní nebo minoritní spinové orientace v kontaktech. Při antiparalelním uspořádání, kdy jsou magnetické momenty kontaktů orientovány v opačných směrech, mají v kontaktech majoritní elektronové spiny opačnou orientaci a pro konduktanci dostaneme

$$G_{\uparrow\downarrow} = \frac{e^2}{h} \left(t_a^{(1)} g_a^{(1)} t_i^{(2)} g_i^{(2)} + t_i^{(1)} g_i^{(1)} t_a^{(2)} g_a^{(2)} \right) . \quad (146)$$

Relativní změna konduktance vyvolaná změnou orientace magnetizace v jednom z kontaktů se obvykle charakterizuje následujícím poměrem

$$\frac{\Delta G}{G_0} \equiv \frac{G^{\uparrow\uparrow} - G^{\uparrow\downarrow}}{G^{\uparrow\uparrow}} = 1 - \frac{R^{\uparrow\uparrow}}{R^{\uparrow\downarrow}} , \quad (147)$$

kde odpory $R^{\uparrow\uparrow}$ a $R^{\uparrow\downarrow}$ jsou dány převrácenými hodnotami odpovídajících konduktancí. Poměr charakterizuje velikost popsaného jevu, který je ne zcela výstižně nazýván magnetorezistencí.

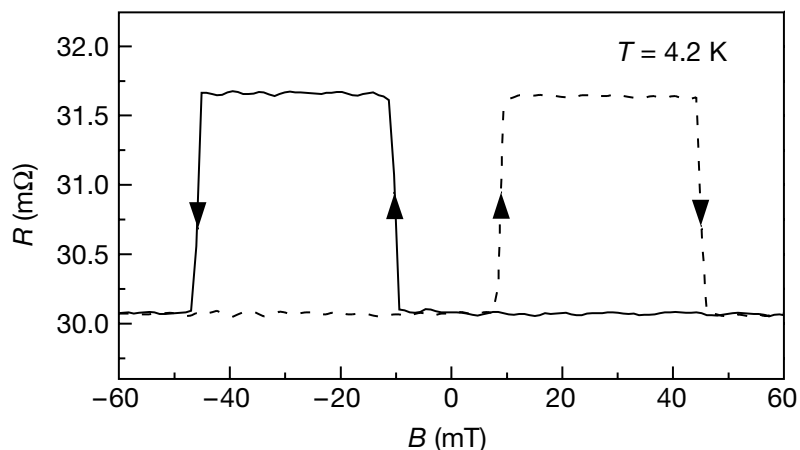
Relativní změny konduktance $\Delta G/G_0$ velmi úzce souvisejí se spinovou polarizací proudů vycházejících z kontaktů. Tu lze definovat následovně

$$P^{(1,2)} = \frac{t_a^{(1,2)} g_a^{(1,2)} - t_i^{(1,2)} g_i^{(1,2)}}{t_a^{(1,2)} g_a^{(1,2)} + t_i^{(1,2)} g_i^{(1,2)}} . \quad (148)$$

Pro změnu konduktance dostaneme

$$\frac{\Delta G}{G_0} = \frac{2P^{(1)}P^{(2)}}{1 + P^{(1)}P^{(2)}} . \quad (149)$$

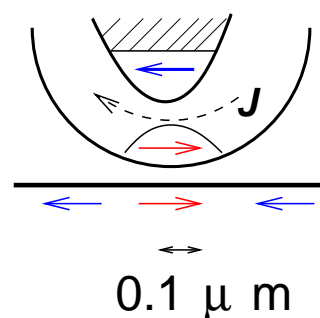
Spinovou polarizaci injektovaného proudu lze určit měřením na tunelovacích strukturách s tenkou vrstvou supravodivého materiálu umístěnou mezi ferromagnetickými elektrodami (kontakty). Měřené konduktance jsou ve velmi dobrém souhlase s uvedeným vztahem (149).



Obrázek 35: Závislost odporu Cu pásku s ferromagnetickými kontakty. Vyšší hodnota odporu odpovídá rozdílné orientaci magnetizace kontaktů. Šipky ukazují směr změny hodnot vnějšího magnetického pole.

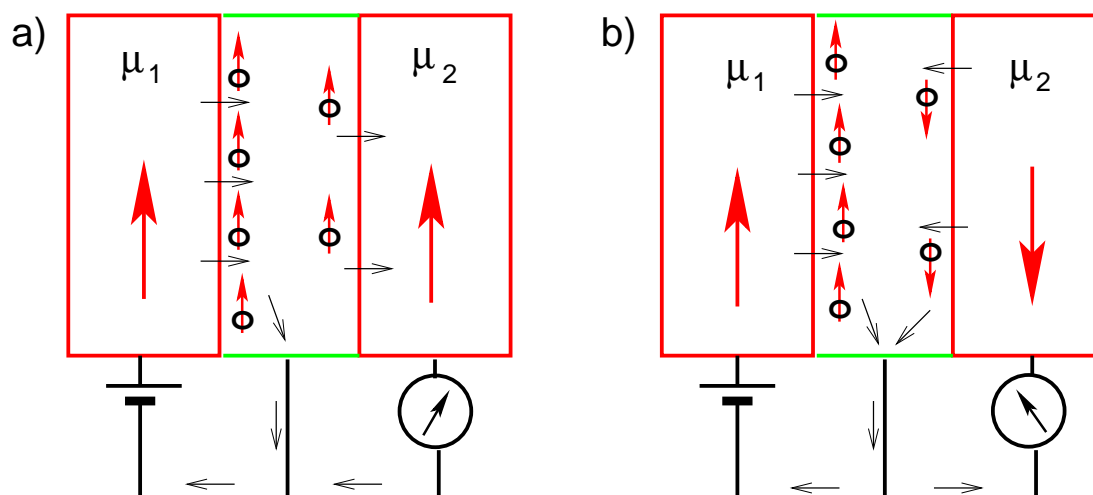
Pokud nehrají významnou roli interferenční jevy je relativní změna konduktance vždy kladná. Typický záznam měřené magnetorezistence je na Obr. 35 [33]. Jedná se o strukturu nanometrických rozměrů tvořenou měděným páskem s ferromagnetickými $\text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$ (permalloy) kontakty. Vzhledem k různým geometrickým rozměrům má každý z kontaktů jiné koercitivní pole a ke změně orientace jeho magnetizace tak dochází při různých hodnotách vnějšího magnetického pole B . Měřené závislosti zachovávají stejné kvalitativní rysy až do pokojových teplot, změny odporu jsou však zhruba o dva řády menší.

Mnohem větší změny jsou pozorovány na tunelovacích strukturách ve kterých je normální kov nahrazen tenkou vrstvičkou izolátoru. Změny odporu dosahují i desítek procent a proto se v takových případech často mluví o gigantické magnetorezistenci. Za její objev obdrželi Albert Fert a Peter Grünberg v roce 2007 Nobelovu cenu. Kromě výše popsané struktury věnovali pozornost i podélnému odporu. Ukázalo se, že podobné vlastnosti vykazují sendvičové struktury ferromagnet-normální kov-ferromagnet i v případě, že jimi neprochází proud napříč, ale používá se jich jako vodičů, kdy proud teče rovnoběžně s vrstvami. Pokud je magnetizace obou ferromagnetických vodičů orientována stejným směrem je odpor struktury menší než v případě, kdy mají opačnou orientaci. Na základě tohoto jevu jsou připravovány čtecí hlavy miniaturních rozměrů, které umožnily zvýšit hustotu magnetických záznamů o několik řádů. Schéma takové hlavy je na Obr. 36. Na izolační materiál je nanosena vrstvička ferromagnetického materiálu, který si drží svoji orientaci magnetizace. Pak následuje vrstvička normálního nemagnetického vodiče překrytá vrstvič-



Obrázek 36: Schematické znázornění čtecí hlavy využívající jevu gigantické magnetorezistence.

kou magneticky měkkého materiálu, který mění směr magnetizace podle orientace magnetizace prvku v záznamovém nosiči. Aplikovaný proud pak vyvolává různě velká napětí v závislosti na orientaci magnetizace na hrotu čtecí hlavy. Na jevu gigantické magnetorezistence jsou založeny i paměti RAM. Oproti standardním systémům mají výhodu v tom, že záznam je uchován i v případě vypnutí napěťových zdrojů.



Obrázek 37: Schématické znázornění funkce spinového tranzistoru. Šipkami jsou vyznačeny majoritní orientace spinů.

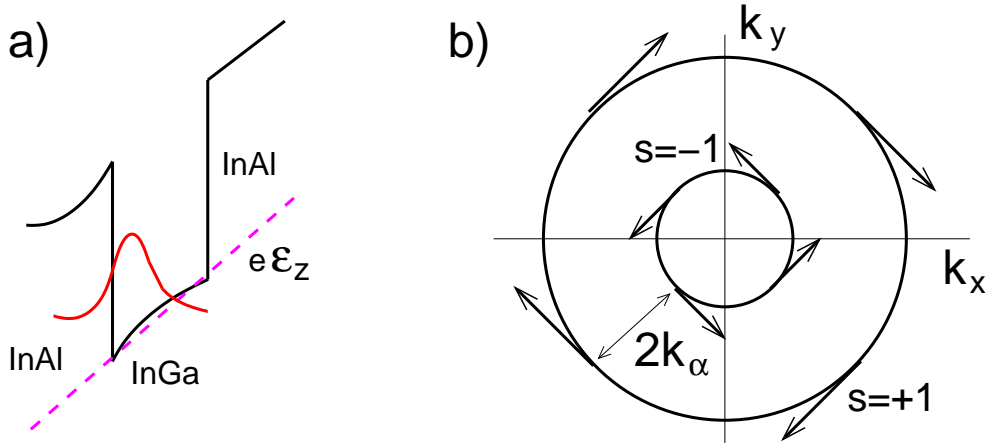
Struktura ferromagnet/kov/ferromagnet může sloužit jako spinový ventil, ale v tříbovém zapojení také jako spinový tranzistor jehož schéma je na Obr. 37. Pokud mají ferromagnetické kontakty stejnou orientaci magnetického momentu, elektrony s majoritní orientací spinu mají po vstupu do nemagnetického kovu na vybranou dvě cesty, jak se dostat zpět do baterie, viz Obr. 37a. Jednou z možností je přímá cesta přes kontakt s nemagnetickým kovem, který má roli báze tranzistoru. Druhou možností je, že projdou přes druhý ferromagnetický kontakt. V případě, že magnetizace ferromagnetických kontaktů bude mít opačnou orientaci, je pravděpodobnost, že elektron využije této druhé cesty významně potlačena. Důvodem je, že majoritní orientace spinu protékajících elektronů má opačnou orientaci. V oblasti nemagnetického kovu navíc dochází ke kumulaci elektronů s majoritním spinem levého ferromagnetického přívodu. Jedná se o nerovnovážnou distribuci elektronového spinu. Tendence docílit rovnovážné distribuce vyvolá difúzi elektronů s opačnou orientací spinu do nemagnetického kovu z pravého ferromagnetického kontaktu, viz Obr. 37b. Tímto procesem je vyvolán tok elektronů pravým ferromagnetickým kontaktem, který má směr opačný, než v případě shodné orientace magnetizace obou kontaktů.

5.3 Vazba spinu s orbitálním momentem v polovodičových heterostrukturách

Interakce elektronového spinu s orbitálním momentem ovlivňuje energetickou strukturu jak izolovaných atomů (kromě s-stavů), tak i krystalů. V polovodičových kvantových strukturách se objevuje další příspěvek pocházející od potenciálu kvantových jam, které danou strukturu charakterizují. Uvažujme dvojrozměrný elektronový systém v potenciálové jámě, která definuje vázané módy, řekněme ve směru \hat{z} . Je-li vytvořen na rozhraní heterostruktury AlGaAs/GaAs, má jáma trojúhelníkový tvar a příspěvek vazby spinu s orbitálním momentem k Hamiltoniánu, tzv. Rašbův člen, bude mít pro případ nulového magnetického pole následující tvar

$$H_{\text{SO}} = \frac{\alpha \mathcal{E}_z}{\hbar} (p_x \sigma_y - p_y \sigma_x) \quad , \quad \alpha \equiv \frac{e \hbar^2}{4m_0^2 c^2} \quad , \quad e \mathcal{E}_z \equiv \frac{dV(z > 0)}{dz} \quad , \quad (150)$$

kde $V(z)$ je potenciál trojúhelníkové jámy o kterém se předpokládá, že je nekonečně vysoký v prostředí AlGaAs, pro $z < 0$. Silnější vazby spinu s orbitálním momentem je možno dosáhnout pro dvojrozměrné systémy v relativně mělkých potenciálových jamách InGa obklopenými nevodivými vrstvami InAl. Jak je znázorněno na Obr. 38a, elektrické pole ve směru \hat{z} vyvolané vnějším napětím vloženým na kovové hradlo vtlačí vlnovou funkci do oblasti potenciálového stupně s velkým gradientem potenciálu. I v tomto případě lze použít uvedený tvar H_{SO} s tím, že elektrické pole je nahrazeno středním polem definujícím sílu vazby, $\mathcal{E}_z \rightarrow \langle \mathcal{E}_z \rangle$. Předností polovodičových heterostruktur s kovovými hradly je, že v nich lze sílu vazby spinu a orbitálního momentu měnit vnějším napětím.



Obrázek 38: a) Schéma heterostruktury s vázaným modem posunutým vlivem vnějšího pole do oblasti hrany potenciálové jámy. b) Orientace spinů na Fermiho energii ($E_F > 0$) v \vec{k} -prostoru pro homogenní systémy.

Vlastní funkce Hamiltoniánu v přiblížení efektivní hmotnosti

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m^*} \sigma_0 + V(z) \sigma_0 + \frac{\alpha \langle E_z \rangle}{\hbar} (p_x \sigma_y - p_y \sigma_x) , \quad (151)$$

mají následující tvar

$$\Psi_{k_x, k_y}^{(s)}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} e^{i(k_x x + k_y y)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{is}{k} (k_x - ik_y) \\ 1 \end{pmatrix} \chi_0(z) , \quad (152)$$

kde $\chi_0(z)$ je nejnižším vázaným módem ve směru \hat{z} . Spinové větve energetického spektra mají následující dispersi, závislost vlastních energií na vlnovém vektoru \vec{k} ,

$$E^{(s)}(k_x, k_y) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} - s \alpha \langle E_z \rangle k = \frac{\hbar^2 (k - sk_\alpha)^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 k_\alpha^2}{2m^*} , \quad (153)$$

kde

$$k_\alpha \equiv \frac{m^* \alpha}{\hbar^2} \langle E_z \rangle , \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} , \quad s = \pm 1 . \quad (154)$$

Ekvienergetické křivky mají tvar kružnic jejichž poloměry se liší o $2k_\alpha$. Ačkoliv operátor rychlosti závisí na spinových operátorech

$$v_x = \frac{i}{\hbar} [x, H] = \frac{1}{m^*} (p_x \sigma_0 + \hbar k_\alpha \sigma_y) , \quad v_y = \frac{i}{\hbar} [y, H] = \frac{1}{m^*} (p_y \sigma_0 - \hbar k_\alpha \sigma_x) , \quad (155)$$

střední hodnoty rychlosti jsou dány gradientem energie v \vec{k} -prostoru, stejně jako v případě kdy vazba spinu s orbitálním momentem není brána v úvahu. Elektron ve stavu \vec{k} má spin orientovaný kolmo na jeho střední hodnotu rychlosti, jak je znázorněno na Obr. 38b.

Zajímavé vlastnosti vykazuje konduktance popsaného systému, pokud proudové přívody budou ferromagnetické. Pro jednoduchost uvažujme jednorozměrný ideální vodič bez rozptylových center, vytvořený z dvojrozměrného systému pomocí potenciálové jámy omezující jeho šířku ve směru \hat{y} . Pokud bude potenciálová jáma dostatečně mělká, vazba mezi spinem a orbitálním momentem zprostředkovaná tímto potenciálem bude slabá a lze ji zanedbat vzhledem k vazbě zprostředkované potenciálem ve směru \hat{z} . Vlastní funkce a energie takového vodiče lze pak aproximovat řešením pro dvojrozměrný systém s tím, že $k_y = 0$. Na dané Fermiho energii, $E_F > 0$, pak leží celkem čtyři stavy s vlnovými čísly $k_x^{(s)} = \pm(k_F + sk_\alpha)$, ($k_F > k_\alpha$). Vlna s energií E_F , postupující ideálním vodičem ve směru \hat{x} musí být lineární kombinací vlastních funkcí s vlnovými čísly $k_x^{(s)} = k_F + sk_\alpha$ a orientací spinu ve směru $-s\hat{y}$. Pokud bude mít levý ferromagnetický proudový přívod magnetizaci orientovanou ve směru \hat{z} musí lineární kombinace splňovat podmínku, že na rozhraní mezi přívodem a kanálem, v bodě $x = 0$, bude spin vstupujícího elektronu orientován paralelně se směrem \hat{z} . Vlnová funkce elektronu ve vodiči splňující tuto podmínku má následující tvar

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ik_F x}}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{2} \left\{ e^{-ik_\alpha x} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} - 2s_z e^{ik_\alpha x} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ & = \frac{e^{ik_F x}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left(\frac{1}{2} + s_z \right) \begin{pmatrix} \cos(k_\alpha x) \\ \sin(k_\alpha x) \end{pmatrix} + i \left(\frac{1}{2} - s_z \right) \begin{pmatrix} -\sin(k_\alpha x) \\ \cos(k_\alpha x) \end{pmatrix} \right\} , \end{aligned} \quad (156)$$

kde $s_z = \pm 1/2$ je spin vstupujícího elektronu. Podél vodiče se tedy orientace spinu mění, spin koná precesi v rovině $x - z$. Například střední hodnota spinu ve směru \hat{z} osciluje s periodou π/k_α

$$\langle \sigma_z \rangle = 2 s_z \cos(2k_\alpha x). \quad (157)$$

Se stejnou periodou osciluje i střední hodnota spinu ve směru \hat{x} . Konduktance bude tedy záviset nejen na orientaci magnetizace pravého ferromagnetického kontaktu, ale i na délce vodiče L a síle vazby mezi spinem a momentem reprezentované veličinou k_α . Pokud oba ferromagnetické proudové kontakty budou mít stejnou orientaci magnetizace, dostaneme

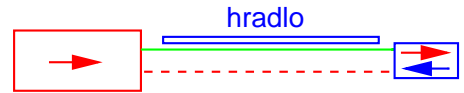
$$\Delta G_{\uparrow\uparrow} \equiv G_{\uparrow\uparrow} - \langle G_{\uparrow\uparrow} \rangle \sim 2 s_z \cos(2k_\alpha L), \quad (158)$$

kde $\langle G_{\uparrow\uparrow} \rangle$ označuje střední hodnotu konduktance. Stejně výsledky lze obdržet i v případě, že ferromagnetické kontakty mají magnetizaci orientovanou podél směru \hat{x} . Také v případě, že magnetizace ferromagnetických kontaktů bude mít opačnou orientaci, bude konduktance oscilující funkcí součinu $k_\alpha L$. Pro relativní změnu konduktance, vyvolanou změnou orientace magnetizace kontaktů, dostaneme

$$\frac{\Delta G}{\langle G_{\uparrow\uparrow} \rangle} \equiv \frac{G_{\uparrow\uparrow} - G_{\uparrow\downarrow}}{\langle G_{\uparrow\uparrow} \rangle} \sim 4 s_z \cos(2k_\alpha L). \quad (159)$$

Díky zachování koherence spinové vlny může nabývat jak kladných, tak i záporných hodnot.

Kvalitativně stejné vlastnosti má i konduktance vodivých pásků s dvojrozměrným elektronovým plynem. Důvodem je, že ke konduktanci nejvíce přispívají Fermiho elektrony s velkou rychlostí ve směru proudu, tedy velkými hodnotami k_x a malými hodnotami k_y . Precese spinu v závislosti na vazbě spinu s orbitálním momentem je fyzikální podstatou polemu řízeného spinového tranzistoru, schematicky znázorněného na Obr. 39. Konduktance takové polovodičové heterostrukтуры se mění v závislosti na napětí vkládaném na hradlo. Měření na strukturách InAlAs/InGaAs/InAlAs, ve kterých je perioda oscilací kolem $1 \mu\text{m}$, si spinová precese uchovává svůj charakter na vzdálenostech řádu několika μm . Koherentní délka spinové vlny je tedy řádově delší, než koherentní délka pro moment hybnosti elektronu λ_ϕ . Naměřené změny konduktance jsou však malé, kolem jednoho procenta. Hlavním důvodem je, že hustota stavů elektronů s oběma orientacemi spinu ve ferromagnetických materiálech je mnohem vyšší než ve dvojrozměrných systémech, což brání výrazně vyšší injekci elektronů s jednou orientací spinu. Lze očekávat, že výraznějšího efektu by mohlo být dosaženo použitím magnetických polovodičů jako proudových kontaktů.



Obrázek 39: Schéma polemu řízeného spinového tranzistoru. Dvojrozměrný elektronový plyn je znázorněn čárkovaně.

Reference

- [1] C. C. Grimes, *Surf. Sci.* **73**, 379 (1978).
- [2] E. Y. Andrei, Ed., *Two Dimensional Electron Systems on Helium and Other Cryogenic Substrates*, Academic Press, New York, (1991).
- [3] C. C. Grimes, G. Adams, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 795 (1979).
- [4] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, C. T. Foxon, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 ; *Phys. Rev.* **B 38**, 3625 (1988).
- [5] S. Frank. P. Poncharal, Z. L. Wang, W. H. de Heer, *Science* **280**, 1744 (1998)
- [6] S. Yamada, M. Yamamoto, *Semicond. Sci. Technol.* **7**, B289 (1992).
- [7] H. van Houten, L. W. Molenkamp, C. W. J. Beenakker, C. T. Foxon, *Semicond. Sci. Technol.* **7**, B215 (1992).
- [8] S. Šafrata ed., *Fyzika nízkých teplot*, MATFYZPRESS, Praha (1998).
- [9] N. Giordano, *Phys. Rev.* **B 42**, 5635 (1980).
- [10] F. Komori, S. Kobayashi, Y. Ootuka, W. Sasaki, *J. Phys.Soc. Jpn.* **B 50**, 1051 (1981).
- [11] Z. Ovadyahu, Y. Imry, *Phys. Rev.* **B 24**, 7439 (1981).
- [12] J. J. Mareš, P. Hubík, J. Kryštofík, D. Kindl, M. Fanta, M. Nesládek, O. Williams, D. M. Gruen, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 092107 (2006).
- [13] S. Washburn, R. A. Webb, *Advances in Physics* **35**, 375 (1986).
- [14] Y. Gefen, Y. Imry, M. Ya. Azbel, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 129 (1984).
- [15] A. Yacoby, R. Schuster, M. Heiblum, *Phys. Rev.* **B 53**, 9583 (1996).
- [16] D. Yu. Sharvin, Yu. V. Sharvin, *JETP Lett.* **34**, 272 (1981).
- [17] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980). K. von Klitzing, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 519 (1986).
- [18] D. B. Chklovskii, K. A. Matveev, B. I. Shklovskii, *Phys. Rev.* **B 47**, 12605 (1993) ; R. J. F. van Haren, F. A. P. Blom, J. H. Wolter, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1198 (1995).
- [19] U. Klass, W. Dietsche, K. von Klitzing, K. Ploog, *Z. Phys. B — Condensed Matter* **82**, 351 (1991) ; *Physica* **B 169**, 363 (1993).

- [20] B. J. van Wees, L. P. Kouwenhoven, C. J. P. M. Harmans, J.G. Williamson, C. E. Timmering, M. E. I. Broekaart, C. T. Foxon, J. J. Haris, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2523 (1989).
- [21] D. C. Tsui, H. L. Störmer, A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
- [22] R. Willett, J. P. Eisenstein, H. L. Störmer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, J. H. English, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1776 (1987).
- [23] R. D. Hofstadter, *Phys. Rev.* **B 14**, 2239 (1976).
- [24] P. Středa, J. Kučera, D. Pfannkuche, R. R. Gerhardts, A. H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B 50**, 11955 (1994).
- [25] M. C. Geisler, J. H. Smet, V. Umansky, K. von Klitzing, B. Naundorf, R. Ketzmerick, H. Schweizer, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 256801 (2004).
- [26] P. Středa, T. Jonckheere, T. Martin, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 129 (2008).
- [27] Y. Meir, N. S. Wingreen, P. A. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3048 (1991).
- [28] D. V. Averin, K. K. Likharev: *Quantum Effects in Small Disordered Systems*, Elsevier, Amsterdam (1990).
- [29] L. P. Kouwenhoven, A. T. Johnson, N. C. van der Vaart, C. J. P. M. Harmans, C. T. Foxon, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1626 (1991).
- [30] M. W. Keller, J. Martinis, N. M. Zimmerman, A. H. Steinbach, *Appl. Phys. Lett.* **69**, 1804 (1996).
- [31] S. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 80 (1963).
- [32] A. P. Heberle, W. W. Rühle a K. Ploog, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3887 (1994).
- [33] F. J. Jedema, A. T. Filip, B. J. van Wees, *Nature* **410**, 345 (2001).